

Suites numériques

II - Les suites arithmétiques

1. Définition :

Une suite de terme général u_n est une suite arithmétique si chaque terme s'obtient en ajoutant une constante au terme précédent. Cette constante est alors appelée raison de la suite.

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{avec } r \text{ constante (raison de la suite)}$$

Une suite arithmétique est donc déterminée par la donnée de :

- Son premier terme
- Sa raison

Pour prouver qu'une suite est arithmétique, il faut démontrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante (indépendante de n).

Exemple :

Ecrire quelques termes de la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.

1, 3, 5, 7, 9, 11...

Ce sont les entiers impairs.

2. Expression du terme général d'une suite arithmétique en fonction du premier terme et de la raison :

$$u_0 \rightarrow u_1 = u_0 + r \rightarrow u_2 = u_1 + r = u_0 + r + r = u_0 + 2r \rightarrow u_3 = u_0 + 3r \dots$$

$$u_n = u_0 + nr$$

Si le premier terme est u_1 :

$$u_1 \rightarrow u_2 = u_1 + r \rightarrow u_3 = u_2 + r = u_1 + r + r = u_1 + 2r \dots$$

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

On peut généraliser :

$$u_n = u_i + (n - i)r$$

Par exemple $u_n = u_3 + (n - 3)r$

$$u_{20} = u_{11} + 9r$$

Exercice :

Soit la suite de premier terme $u_0 = -15$ et de raison $a = -2$

Exprimer le terme général u_n en fonction de n .

Solution :

$$u_n = -15 - 2n$$

Maintenant, calculer le onzième terme.

Le onzième terme est : u_{10}

$$u_{10} = -15 - 20 = -35$$

Exercice :

Soit la suite de premier terme $u_1 = 3$ et de raison $a = \frac{1}{2}$

Exprimer le terme général u_n en fonction de n .

Solution :

$$u_n = u_1 + (n - 1) \times \frac{1}{2} = 3 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} + \frac{n}{2}$$

Exercice :

Soit la suite de arithmétique u_n telle que $u_{10} = -32$ et $u_5 = -7$

Exprimer le terme général u_n en fonction de n et du premier terme u_0 à déterminer.

Solution :

$$u_{10} = u_5 + 5r$$

$$-32 = -7 + 5r$$

$$5r = -25$$

$$r = -5$$

donc $u_n = u_0 - 5n$

$$u_{10} = u_0 - 50 = -32$$

$$u_0 = -32 + 50 = 18$$

donc $u_n = 18 - 5n$

3. Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

On cherche : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n$

Trouvons la formule :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n$$

$$S = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_1 + u_0$$

Donc :

$$S + S = 2S = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) + \dots + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0)$$

$$u_0 + u_n = u_0 + u_0 + nr = 2u_0 + nr$$

$$u_1 + u_{n-1} = u_0 + r + u_0 + (n-1)r = 2u_0 + nr$$

$$u_2 + u_{n-2} = u_0 + 2r + u_0 + (n-2)r = 2u_0 + nr$$

...

$$\text{Donc } 2S = (n+1)(2u_0 + nr)$$

↑
Nombre de termes dans la somme

←
Valeur de chaque terme

$$S = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

A retenir :

Si u_n est le terme général d'une suite arithmétique, la somme de ses termes vaut :

$$S = \frac{\text{nb de termes} (1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Applications :

Soit la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 4.

Calculer la somme des 10 premiers termes.

Calculer la somme des 100 premiers termes.

Calculer la somme du 10^{ème} au 20^{ème} termes inclus.

Notons le premier terme $u_0 = 1$

➤ Somme des 10 premiers termes : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_9$

$$u_9 = 1 + 9r = 37$$

$$S = \frac{10(1 + 37)}{2} = 190$$

➤ Somme des 100 premiers termes : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{99}$

$$u_{99} = 1 + 99r = 397$$

$$S = \frac{100(1 + 397)}{2} = \frac{39800}{2} = 19900$$

➤ Somme du 10^{ème} au 20^{ème} termes inclus (11 termes en tout).

$$u_{10} = 1 + 10r = 41$$

$$u_{20} = 1 + 20r = 81$$

$$S = \frac{11(41 + 81)}{2} = \frac{1342}{2} = 671$$

4. Sens de variation d'une suite arithmétique :

$$u_{n+1} - u_n = r \quad (\text{raison de la suite})$$

Une suite arithmétique de raison r est :

- Croissante si r est positif
- Décroissante si r est négatif.