Suites numériques
I – Généralités sur les suites

1. Exemples préliminaires :

1er exemple :
Au 1er janvier 2007, la population d'une ville est de 200 000 habitants. Notons la P_0.
Des experts estiment que cette population doit augmenter de 4 000 habitants par an dans les années à venir.

Notons P_n la population de la ville à l'année 2007+n.
Donner P_0, P_1, P_2, P_3 et P_{n+1} en fonction de P_n.

Solution :

Au 1er janvier 2007, la population est de P_0 habitants, et $P_0 = 200000$
Au 1er janvier 2008, la population est de P_1 habitants, et $P_1 = P_0 + 4000 = 204000$
Au 1er janvier 2009, la population est de P_2 habitants, et $P_2 = P_1 + 4000 = 208000$
Au 1er janvier 2010, la population est de P_3 habitants, et $P_3 = P_2 + 4000 = 212000$
Ainsi de suite…

On a $P_{n+1} = P_n + 4000$

2ème exemple :
On suppose maintenant que la population augmente de 2% par an.

Solution :
Au 1er janvier 2007, la population est de P_0 habitants, et $P_0 = 200000$
Au 1er janvier 2008, la population est de P_1 habitants, et

$$P_1 = P_0 + P_0 \times \frac{2}{100} = P_0\left(1 + \frac{2}{100}\right) = 1,02 \times P_0 = 1,02 \times 200000 = 204000$$

Au 1er janvier 2009, la population est de P_2 habitants, et

$$P_2 = 1,02 \times P_1 = 1,02 \times 204000 = 208080$$

Au 1er janvier 2010, la population est de P_3 habitants, et $P_3 = 1,02 \times P_2 = 212242$
Ainsi de suite…

On a $P_{n+1} = P_n + \frac{2}{100} P_n$

$$P_{n+1} = 1,02 \times P_n$$

2. Définition d'une suite :

Une suite est une fonction de l'ensemble $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.   On écrit u_n pour désigner l'image de n par la suite u.

On note souvent (u_n) ou u la suite en tant qu'objet mathématique. u_n, sans parenthèses, désigne l'image de n par (u_n). C'est le terme d'indice n de la suite.

Exemples :

- Soit la suite u de terme général $u_n = 2n$
  On a : $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 6\ldots$
  Les termes de la suite u sont les entiers pairs.

- Soit la suite u de terme général $u_n = 2n + 1$
  On a : $u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 7\ldots$
  Les termes de la suite u sont les entiers impairs.

- Soit la suite u de terme général $u_n = 2^n$
  On a : $u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 8, u_4 = 16\ldots$
  Les termes de la suite u sont les puissances de 2.

- Soit la suite u de terme général $u_n = \dfrac{n}{n+1}$
  On a : $u_0 = 0, u_1 = \dfrac{1}{2}, u_2 = \dfrac{2}{3}, u_3 = \dfrac{3}{4}\ldots$

3. Les différents modes de génération d'une suite :

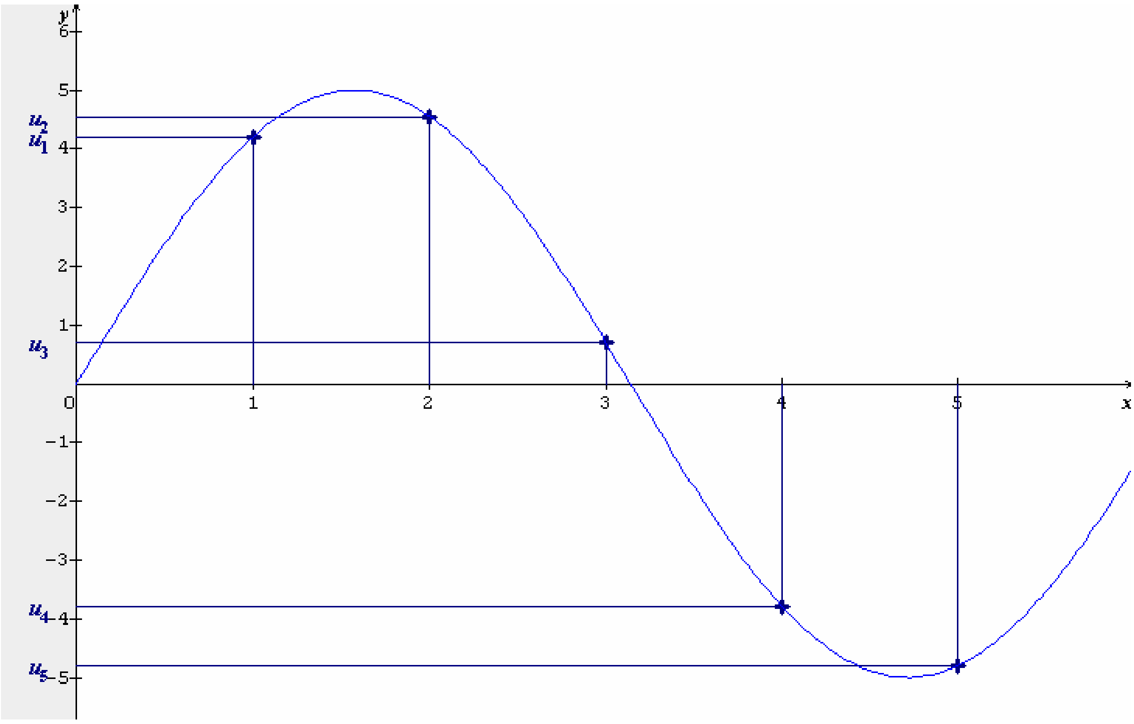
Une suite peut être définie de l'une ou l'autre des deux manières suivantes :

- **Définition d'une suite par la définition du terme général en fonction de n :**

Suite du type : $u_n = g(n)$

On peut alors obtenir facilement la valeur d'un terme u_n pour une valeur de n donnée.

Représentation graphique :



Représentation graphique de la suite de terme général $u_n = 5\sin n$

➢ **Définition d'une suite par la donnée du 1^er terme et d'une relation entre** u_n et u_{n+1}

Suite du type : $u_{n+1} = g(u_n)$

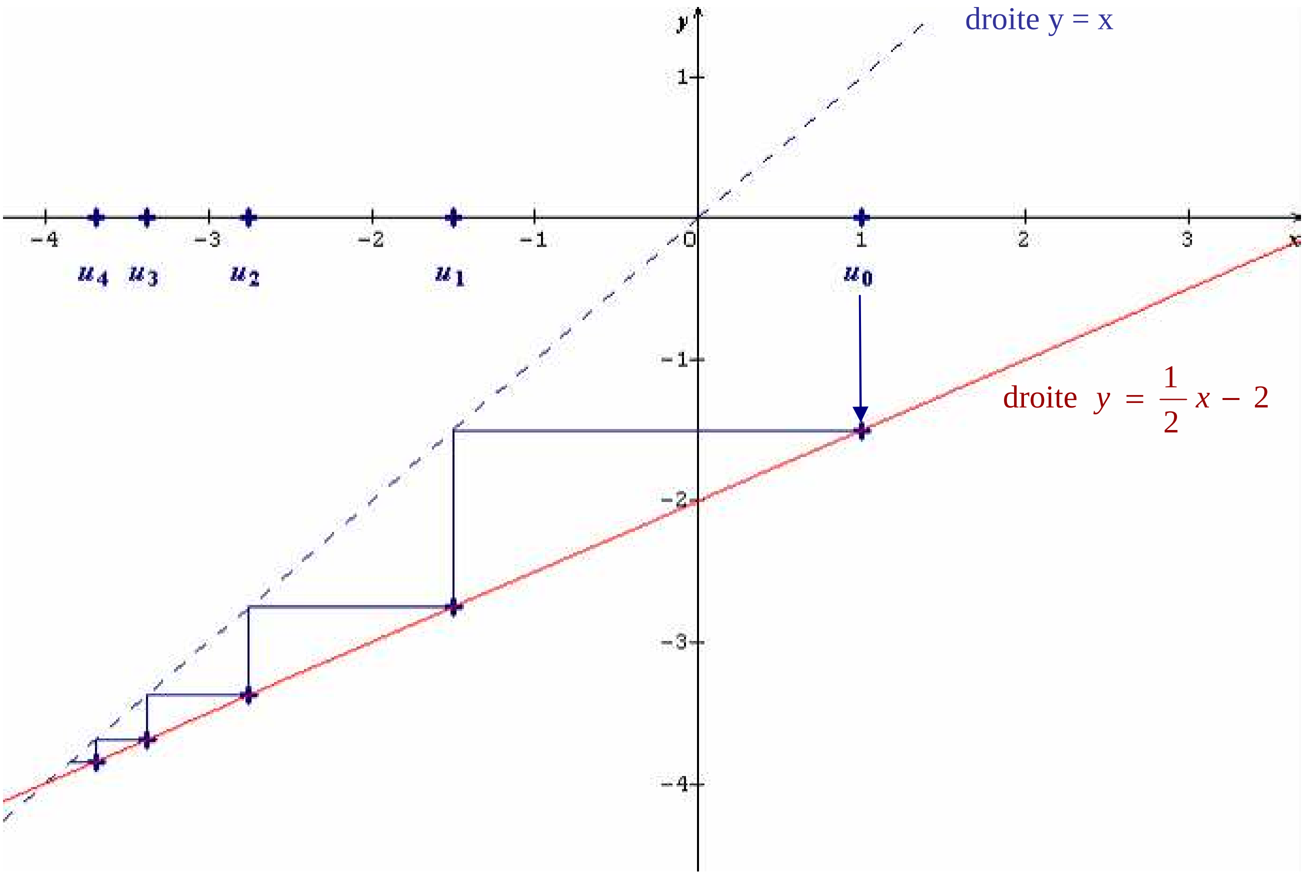
Les 2 exemples d'introduction (I.1.) sont des suites de ce type.

Autre exemple :

Suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 2 \end{cases}$

On a alors : $u_1 = -\dfrac{3}{2}, u_2 = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{3}{2}\right) - 2 = -\dfrac{11}{4}\ldots$

Représentation graphique :



4. Sens de variation d'une suite :

Une suite de terme général u_n est une **suite croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n \leq u_{n+1}$$

Une suite de terme général u_n est une **suite décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n \geq u_{n+1}$$

Une suite de terme général u_n est une **suite constante (ou stationnaire)** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = u_{n+1}$$

Etude du sens de variation d'une suite :

Cas général : on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$

Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite est croissante.
Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite est décroissante.

Exemple :

Soit la suite $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ ($n \geq 1$). Quel est le sens de variation de cette suite ?

Solution :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n \times 2^{n+1} - (n+1)2^n}{n(n+1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^n(2n - n - 1)}{n(n+1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2^n(n-1)}{n(n+1)}$$

Et pour tout $n \geq 1$, on a :

$2n > 0$
$n - 1 \geq 0$
$n > 0$
$n + 1 > 0$
Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$
La suite est croissante.

2ème Exemple :
$u_0 = -12$
$u_{n+1} = 4 + u_n$

Solution :
$u_{n+1} - u_n = 4$

Comme $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite est croissante.

3ème Exemple :

$u_0 = -1$

$u_{n+1} = 3u_n + 4$

Solution :

$u_n = 3u_{n-1} + 4$

Donc $u_{n+1} - u_n = 3u_n + 4 - 3u_{n-1} - 4 = 3(u_n - u_{n-1})$

$u_{n+1} - u_n$ a le même signe que $u_n - u_{n-1}$.

$u_n - u_{n-1}$ a le même signe que $u_{n-1} - u_{n-2}$.

…

que $u_1 - u_0$

Or $u_1 - u_0 = (3(-1)+4) - (-1) = 2 + 1 = 2 > 0$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite est croissante.

4ème Exemple :

$u_0 = -2$

$u_{n+1} = 3u_n + 4$

Solution :

$u_1 = 3u_0 + 4 = -6 + 4 = -2$

$u_2 = 3u_1 + 4 = -6 + 4 = -2$

….

La suite est constante.

5ème Exemple :

$u_0 = -\frac{7}{3}$

$u_{n+1} = 3u_n + 4$

Solution :

$u_1 = 3u_0 + 4 = -7 + 4 = -3$

$u_2 = 3u_1 + 4 = -9 + 4 = -5$

$u_3 = 3u_2 + 4 = -15 + 4 = -11$

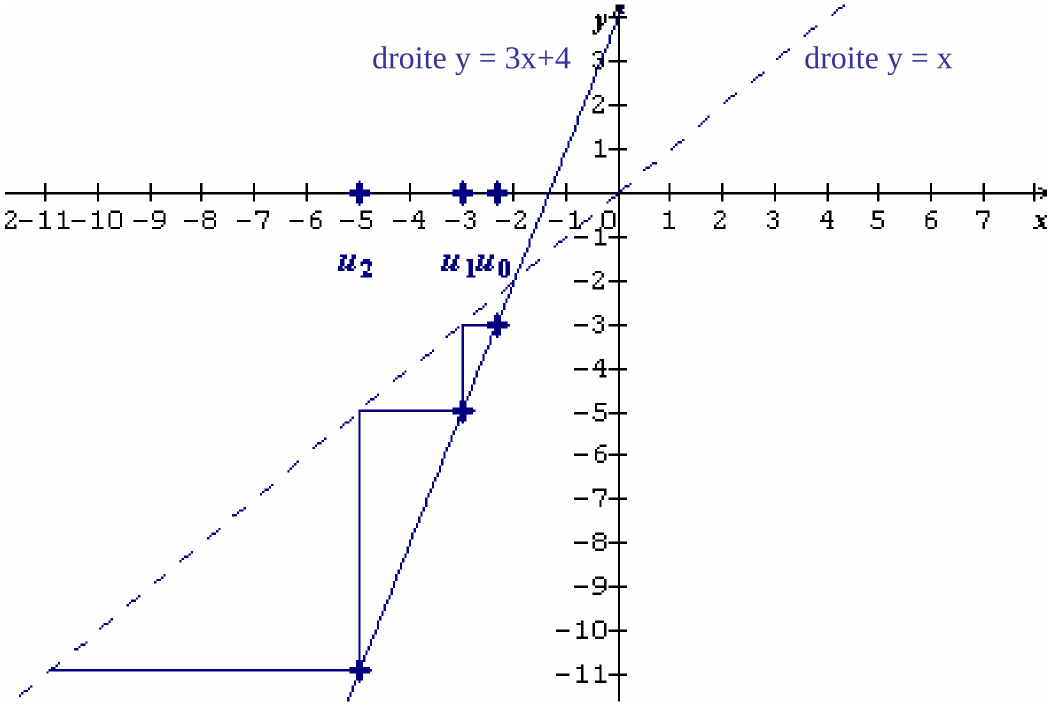
….

De même que dans le 3ème exemple, $u_{n+1} - u_n$ a le même signe que $u_1 - u_0$.

$u_1 - u_0 = -3 + \frac{7}{3} = -\frac{2}{3} < 0$

La suite est décroissante.

Représentation graphique de cette suite :



<u>Cas particulier :</u> suite du type $u_n = g(n)$

Pour une suite de terme général $u_n = g(n)$: • Si la fonction g est croissante sur $[0;+\infty[$, alors la suite est croissante. • Si la fonction g est décroissante sur $[0;+\infty[$, alors la suite est décroissante.

Exemple :

$u_n = \dfrac{4n+1}{3n+5}$. Quel est le sens de variation de cette suite ?

Solution :

Soit $g(x) = \dfrac{4x+1}{3x+5}$. Etudions les variations de g sur $[0;+\infty[$.

$$g'(x) = \frac{4(3x+5)-3(4x+1)}{(3x+5)^2}$$

$$g'(x) = \frac{12x+20-12x-3}{(3x+5)^2} = \frac{17}{(3x+5)^2}$$

Donc $g'(x) > 0$ sur $[0;+\infty[$, donc g est croissante sur $[0;+\infty[$.

La suite est croissante.

5. Suite majorée, suite minorée :

Une suite de terme général u_n est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq M$.
Une suite de terme général u_n est **minorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq M$.

Exemple :

$u_n = 5 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0$ donc $u_n \geq 5$. La suite est minorée par 5.

Exemple :

$u_n = 7 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$-\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0$ donc $u_n \leq 7$. La suite est majorée par 7.