Barycentres

I. Barycentre d'un système pondéré de 2 points

1. Existence d'un point G vérifiant $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$:

Exemple préliminaire :

$$2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

Etude du cas général :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$
$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$\beta\overrightarrow{AB}=-(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}$$
$$\beta\overrightarrow{AB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{AG}$$

- Si $\alpha+\beta\neq 0$, alors $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

  G existe et il est unique. C'est le barycentre du système $(A;\alpha),(B;\beta)$
- Si $\alpha+\beta=0$, alors $\beta\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

  G n'existe pas si *A* et *B* sont distincts.

2. Définition du barycentre d'un système pondéré de 2 points :

Soit $(A;\alpha),(B;\beta)$ un système pondéré de 2 points. Si $\alpha+\beta\neq 0$, il existe un unique point G tel que : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

G est le barycentre du système $(A;\alpha),(B;\beta)$.

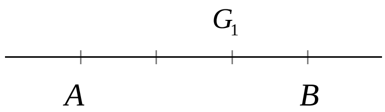
On a alors $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

Au niveau physique, le point G serait le point d'équilibre d'une balance $[A;B]$ chargée de deux masses de poids α et β à ses extrémités :

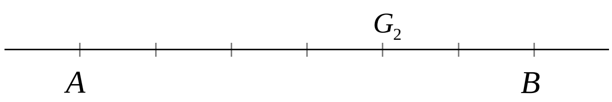
3. Exemples de construction d'un barycentre d'un système pondéré de 2 points :

- G_1 : barycentre du système $(A;1),(B;3)$
- G_2 : barycentre du système $(A;2),(B;5)$
- G_3 : barycentre du système $(A;-3),(B;1)$
- G_4 : barycentre du système $(A;1),(B;1)$

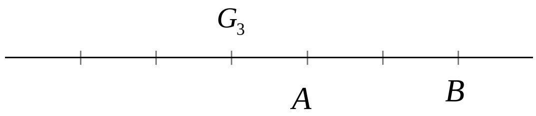
- G_1 : barycentre du système $(A;1),(B;3)$: $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ $\quad \overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$



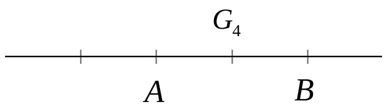
- G_2 : barycentre du système $(A;2),(B;5)$: $2\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ $\quad \overrightarrow{AG}=\dfrac{5}{7}\overrightarrow{AB}$



- G_3 : barycentre du système $(A;-3),(B;1)$: $-3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ $\quad \overrightarrow{AG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



- G_4 : barycentre du système $(A;1),(B;1)$: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ $\quad \overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



4. Quelques propriétés du barycentre :

- Le barycentre G d'un système $(A;\alpha),(B;\beta)$ appartient à la droite (AB).

- **Homogénéité :**

Le barycentre d'un système pondéré est inchangé lorsqu'on remplace les coefficients par des coefficients proportionnels.

Par exemple, $(A;-3),(B;1)$ a le même barycentre que $(A;-6),(B;2)$ ou que $(A;-30),(B;10)$.

- Position du barycentre sur la droite (AB) en fonction du signe de α et de β :

- si α et β sont de même signe, le barycentre est entre A et B.
- si α et β sont de signes contraires, le barycentre est à l'extérieur du segment $[A;B]$.

5. Réduction d'un vecteur de la forme $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$:

☝ **Paragraphe important !**

Soient A et B deux points et α et β deux réels tels que $\alpha+\beta\neq 0$. On note G le barycentre du système $(A;\alpha),(B;\beta)$.
Pour tout point M, on a alors :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

Ou $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$

Démonstration :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\alpha\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+\beta\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)$$
$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}$$
$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}+\vec{0}$ car $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ car G est le barycentre du système $(A;\alpha),(B;\beta)$

6. Coordonnées du barycentre dans le plan muni d'un repère :

Le barycentre d'un système $(A;\alpha),(B;\beta)$ a pour coordonnées :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$$
$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$$

Démonstration :

D'après la formule du 5., avec M à l'origine O du repère, on a :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$$

$$x_G\vec{i}+y_G\vec{j}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(x_A\vec{i}+y_A\vec{j}\right)+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(x_B\vec{i}+y_B\vec{j}\right)$$
$$x_G\vec{i}+y_G\vec{j}=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}\vec{i}+\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\vec{j}$$

7. Quelques exemples d'application du barycentre de 2 points :

Exemple 1 :

Soient A et B deux points distincts.
Dans chacun des cas suivants, déterminer 2 réels α et β tels que G soit le barycentre du système $(A;\alpha),(B;\beta)$.

- $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GB}$
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{GA}$
- $3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}=\vec{0}$

Solutions :

- $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GB}$

$\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
$-\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

G est le barycentre du système $(A;1),(B;2)$

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{GA}$

$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GA} = \vec{0}$
$-4\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

G est le barycentre du système $(A;-4),(B;2)$

- $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} = \vec{0}$

$3\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}\right) + \overrightarrow{GA} = \vec{0}$
$-3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA} = \vec{0}$
$-2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

G est le barycentre du système $(A;-2),(B;3)$

Utilisation des sommes vectorielles $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}$

Soient deux points A et B tels que $AB = 10$

- Construire C, barycentre du système $(A;2),(B;3)$
  Construire D, barycentre du système $(A;3),(B;2)$

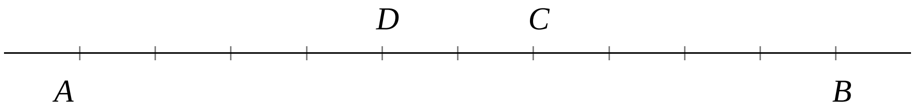
- Déterminer l'ensemble des points M tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = 10$

- Déterminer l'ensemble des points M tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\|$

Solutions :

- C barycentre du système $(A;2),(B;3)$ et D barycentre du système $(A;3),(B;2)$

On a : $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$



- Ensemble des points M tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=10$

$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MC}$

$\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|5\overrightarrow{MC}\right\|=5MC$ car C est le barycentre de $(A;2),(B;3)$

On veut que $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=10$, donc on veut que $5MC=10$, soit $MC=2$
L'ensemble des points cherchés est le cercle de centre C et de rayon 2.

- Ensemble des points M tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$

$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MC}$
$3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MD}$

On veut donc que $5\overrightarrow{MC}=5\overrightarrow{MD}$ soit $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}$. On a donc $MC=MD$

L'ensemble des points M recherché est la médiatrice du segment $[CD]$.

II. Barycentre d'un système pondéré de 3 points

1. Extension de la définition et des propriétés des systèmes à 2 points :

On considère un système pondéré de 3 points $(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)$ avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

Le barycentre de ce système est l'unique point G défini par :
$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

Pour tout point M du plan, on a :

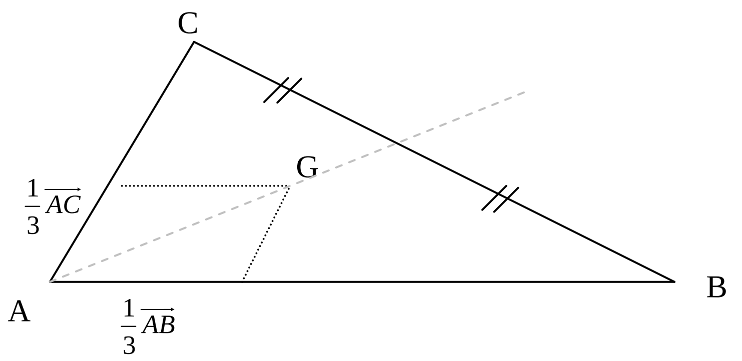
$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

ou encore : $\overrightarrow{MG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}$

2. Exemple de construction :

- Soit G le barycentre du système $(A;1),(B;1),(C;1)$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$$



G est le centre de gravité du triangle ABC.

3. Associativité du barycentre :

On peut remplacer deux points d'un barycentre d'un système de 3 points en remplaçant ces 2 points par leur barycentre affecté de la somme des coefficients de ces 2 points (à condition qu'elle ne soit pas nulle).

Démonstration :

On considère un système pondéré de 3 points $(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)$ avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Si $\alpha+\beta\neq 0$, soit H le barycentre de $(A;\alpha),(B;\beta)$, donc $\alpha\overrightarrow{HA}+\beta\overrightarrow{HB}=\vec{0}$

$\alpha\overrightarrow{HG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{HG}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ donc $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH}$

Donc $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GH}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

G est donc le barycentre de $(H;\alpha+\beta),(C;\gamma)$

4. Autres propriétés du barycentre de 3 points :

➢ Homogénéité

Le barycentre d'un système de 3 points est inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre non nul.

➢ Isobarycentre d'un système de 3 points

Soit G le barycentre du système $(A;1),(B;1),(C;1)$

On a donc $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

G est le centre de gravité du triangle ABC.

➢ Coordonnées d'un barycentre d'un système de 3 points

Le barycentre d'un système $(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)$ a pour coordonnées :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$
$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$