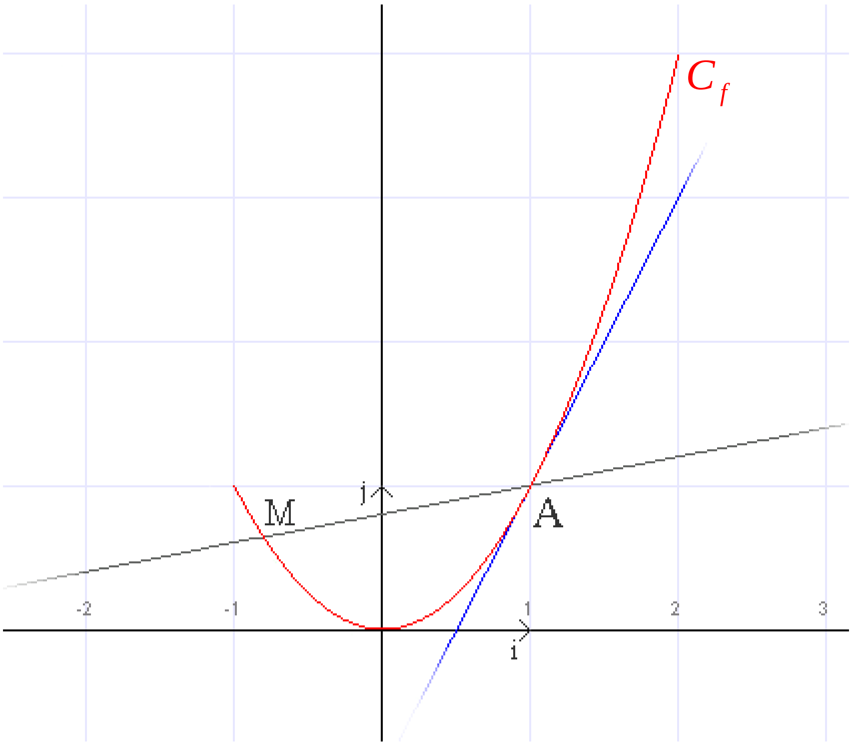
Dérivation

I. Des exemples pour commencer

1. Fonction carrée

On définit la fonction *f* telle que $f(x) = x^2$ sur $[-1;2]$.
Soient les points $A(1;1)$ et $M(x;x^2) \in C_f$
(AM) est une sécante à la courbe C_f



Calculons le coefficient directeur de (AM) :

$$m = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$m = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1 \text{ si } x \neq 1.$$

Lorsque l'on « rapproche beaucoup » le point M du point A, (AM) devient la tangente à C_f en A.
Calculons le coefficient directeur de cette tangente. Si on « rapproche beaucoup » le point M du point A, cela signifie que dans les coordonnées de M, x tend vers 1 (car $x_A = 1$).
Le coefficient directeur de la tangente en A est donc :

$$\lim_{x_M \to 1} \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \lim_{x_M \to 1} = \frac{{x_M}^2 - 1}{x_M - 1} = \lim_{x_M \to 1} (x_M + 1) = 2$$

La tangente en A à la courbe est donc la droite passant par A et de coefficient directeur $2 = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(x_A)}{x - x_A}$.

On note $f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ **C'est le nombre dérivé de *f* en *x=1***

La tangente en A admet pour équation : $y = 2x + b$
Et comme A a pour coordonnées $(1;1)$, on a $1 = 2 + b$ donc $b = -1$

Tangente en A : $y = 2x - 1$

Recherche du nombre dérivé en un point a quelconque de la courbe :

Le nombre dérivé en un point a quelconque est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative en ce point a.

Le point $a \in C_f$, notons ses coordonnées (a, a^2).
Ce coefficient directeur est égal à $m = \frac{y_M - y_a}{x_M - x_a} = \frac{x^2 - y_a}{x - x_a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$.
Et $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x - a} = x + a$ si $x \neq a$.

Pour trouver la valeur du coefficient directeur, on fait tendre x vers a :

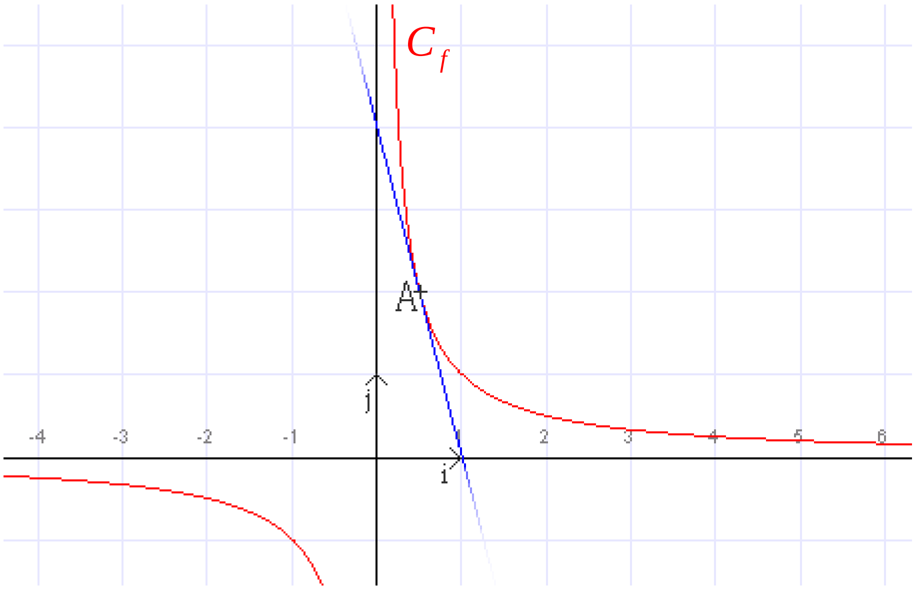
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a$$

C'est le nombre dérivé de la fonction carrée en a : $f'(a) = 2a$

2. Fonction inverse

On définit la fonction f telle que $f(x)=\dfrac{1}{x}$. On a $D_f=\mathbb{R}^*$ (signifie tout $\mathbb{R}$ sauf 0)

Soient les points $A\left(\dfrac{1}{2};2\right)$ et $M\left(x;\dfrac{1}{x}\right)\in C_f$



Recherchons l'équation de la tangente à C_f en A.

La tangente en A est une droite passant par A et de coefficient directeur $\boxed{\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}}$

$$\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{x}-2}{x-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1-2x}{x}}{\frac{2x-1}{2}}=\frac{1-2x}{x}\times\frac{2}{2x-1}=\frac{2}{x}\times\frac{-(2x-1)}{2x-1}$$

Si $x\neq\dfrac{1}{2}$, on a $\dfrac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=-\dfrac{2}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(-\dfrac{2}{x}\right)=-4$

Donc $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-4$

La tangente en A admet une équation du type $y=-4x+b$ et comme elle passe par $A\left(\dfrac{1}{2};2\right)$,

on a $2=-4\times\dfrac{1}{2}+b$ donc $b=4$

L'équation de la tangente à C_f en A est : $y = -4x + 4$

Recherche du nombre dérivé en un point a quelconque de la courbe :

Rappel : Le nombre dérivé en un point a quelconque est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative en ce point a.

Le point $a \in C_f$, notons ses coordonnées $\left(a, \frac{1}{a}\right)$.

Le coefficient directeur est égal à $m = \frac{y_M - y_a}{x_M - x_a} = \frac{\frac{1}{x} - y_a}{x - x_a} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a} = \frac{1}{xa} \times \frac{a-x}{x-a}$.

Si $x \neq a$, on a $m = -\frac{1}{xa}$.

Pour trouver la valeur du coefficient directeur, on fait tendre *x* vers *a* :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \left(-\frac{1}{xa}\right) = -\frac{1}{a^2}$$

C'est le nombre dérivé de la fonction carrée en *a* : $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$

II. Définition du nombre dérivé en *x=a* – tangente en *x=a*

1. Nombre dérivé d'une fonction en *x=a*

Soit *f* une fonction définie sur un ensemble *D*, et soit *a* un élément de *D*.
f est définie « au voisinage » de *a*.

Le nombre dérivé de *f* en *x=a* est noté $f'(a)$ et est défini par :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

On peut également poser $x = a + h$. On a alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Et on obtient : $\boxed{f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}}$

2. Tangente à la courbe en *x=a*

Soit *f* une fonction dérivable en *x*=*a*. La tangente à la courbe représentative de *f* en $A(a; f(a))$ est la droite passant par *A* et de coefficient directeur $f'(a)$.

La tangente en *A* a donc pour équation $y = f'(a) \times x + b$
Par définition, cette tangente passe par $A(a; f(a))$, donc $f(a) = f'(a) \times a + b$ soit $b = f(a) - f'(a) \times a$
La tangente en *A* a donc pour équation $y = f'(a) \times x + f(a) - f'(a) \times a = f'(a)(x - a) + f(a)$

A retenir :

La tangente au point *A* d'abscisse *a* de la courbe représentative de *f* a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

III. Fonctions dérivées et dérivées de fonctions usuelles

1. Fonction dérivée d'une fonction *f*

Définition :

Si une fonction *f* est dérivable en tout point *a* d'un intervalle *I*, on appelle fonction dérivée de *f* sur *I* la fonction qui associe à tout réel de *I* le nombre dérivé de *f* en ce point, et on note f' cette fonction :

$$x \overset{f'}{\longmapsto} f'(x)$$

2. Dérivée de fonctions usuelles

Les formules encadrées de ce chapitre sont à connaître par cœur (ou à savoir retrouver).

- **Fonction constante :**

$$\boxed{\text{Si } f(x)=k \quad \text{alors} \quad f'(x)=0}$$

Démonstration :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{k-k}{x-a}=0 \text{ si } x\neq a$$

Quelque soit $x\neq a$, on a $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$

Donc $f'(a)=0$ pour tout a.

- **Fonction affine :**

$$\boxed{\text{Si } f(x)=mx+p \quad \text{alors} \quad f'(x)=m}$$

Démonstration :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{m.x+p-(m.a+p)}{x-a}=\frac{m(x-a)}{x-a}=m \text{ si } x\neq a$$

Quelque soit $x\neq a$, on a $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=m$

Donc $f'(a)=m$ pour tout a.

Exemples :

$f(x)=x$	donc	$f'(x)=1$
$f(x)=4x-4$	donc	$f'(x)=4$
$f(x)=3-2x$	donc	$f'(x)=-2$
$f(x)=\frac{7}{4}x$	donc	$f'(x)=\frac{7}{4}$

➢ Fonction carrée – fonction trinôme :

Si $f(x)=x^2$ alors $f'(x)=2x$ Si $f(x)=ax^2+bx+c$ alors $f'(x)=2ax+b$

Démonstration pour x² :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{(x+a)(x-a)}{x-a}=x+a \text{ si } x\neq a$$

Quelque soit $x\neq a$, on a $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=2a$

Donc $f'(a)=2a$ pour tout a.

Exemples :

$f(x)=\frac{1}{2}x^2$	donc	$f'(x)=x$
$f(x)=2x^2+4x-4$	donc	$f'(x)=4x+4$
$f(x)=-x^2-7$	donc	$f'(x)=-2x$
$f(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{4}x$	donc	$f'(x)=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$

➢ Fonction inverse :

Si $f(x)=\frac{1}{x}$ alors $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

Démonstration :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a}=\frac{1}{x.a}\times\frac{a-x}{x-a}=-\frac{1}{x.a} \text{ si } x\neq a$$

Quelque soit $x\neq a$, on a $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\frac{1}{a^2}$

Donc $f'(a)=-\frac{1}{a^2}$ pour tout a.

➢ Fonction racine carrée :

$$\text{Si } \underset{x \geq 0}{f(x) = \sqrt{x}} \quad \text{alors} \quad \underset{x>0}{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Démonstration:

Soient $x \geq 0$ et $a \geq 0$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} = \frac{x-a}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \text{ si } x \neq a$$

Quelque soit $x \neq a$, on a $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

Donc $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ pour tout a.

➢ Fonction puissance 3 – puissance *n* :

$$\text{Si } f(x) = x^3 \quad \text{alors} \quad f'(x) = 3x^2$$
$$\text{Si } f(x) = x^n \quad \text{alors} \quad f'(x) = n.x^{n-1}$$

Démonstration pour $f(x) = x^3$ ***:***

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^3-a^3}{x-a} = \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a} = x^2+ax+a^2 \text{ si } x \neq a$$

Quelque soit $x \neq a$, on a $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a}(x^2+ax+a^2) = a^2+a^2+a^2 = 3a^2$

Donc $f'(a) = 3a^2$ pour tout a.

Exemples :

$f(x) = x^7$	donc	$f'(x) = 7x^6$
$f(x) = x^4$	donc	$f'(x) = 4x^3$
$f(x) = x^{33}$	donc	$f'(x) = 33x^{32}$
$f(x) = x^{-3}$	donc	$f'(x) = -3x^{-4}$

- **Fonction sinus et cosinus :**

Si $f(x)=\sin x$ alors $f'(x)=\cos x$
Si $f(x)=\cos x$ alors $f'(x)=-\sin x$

3. Opérations sur les fonctions dérivables

Les formules encadrées de ce chapitre sont à connaître par cœur (ou à savoir retrouver).

- **Dérivée du produit d'une fonction par une constante :**

Si $f(x)=k.u(x)$ alors $f'(x)=k.u'(x)$

Exemples :

$f(x)=5x^4$ donc $f'(x)=5\times 4x^3=20x^3$

$f(x)=\dfrac{3}{x}$ donc $f'(x)=3\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{3}{x^2}$

- **Dérivée d'une somme de fonction :**

Si $f(x)=u(x)+v(x)$ alors $f'(x)=u'(x)+v'(x)$

Exemples :

$f(x)=5x^4+3x^3-\dfrac{1}{2}x-2$ donc $f'(x)=5\times 4x^3+3\times 3x^2-\dfrac{1}{2}=20x^3+9x^2-\dfrac{1}{2}$

$f(x)=4x^2+\dfrac{1}{x}$ donc $f'(x)=8x-\dfrac{1}{x^2}$

$f(x)=x^3+\dfrac{3}{x}$ donc $f'(x)=3x^2+3\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=3x^2-\dfrac{3}{x^2}$

- **Dérivée d'un produit de fonctions dérivables :**

Si $f(x)=u(x).v(x)$ alors $f'(x)=u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$

Exemples :

- $f(x) = (2x+1)(3x-4)$

  On pose $\quad u(x) = 2x+1 \quad$ et $\quad v(x) = 3x-4$

  On obtient $\quad u'(x) = x \quad$ et $\quad v'(x) = 3$

  Donc $\quad f'(x) = 2(3x-4)+3(2x+1)$

  $f'(x) = 6x-8+6x+3$

  $f'(x) = 12x-5$

- $f(x) = (-x^2+2)(2x+5)$

  On pose $\quad u(x) = -x^2+2 \quad$ et $\quad v(x) = 2x+5$

  On obtient $\quad u'(x) = -2x \quad$ et $\quad v'(x) = 2$

  Donc $\quad f'(x) = -2x(2x+5)+2(-x^2+2)$

  $f'(x) = -4x^2-10x-2x^2+4 = -6x^2-10x+4$

- $f(x) = (x^2+2x+1)(-x^3+2)$

  On pose $\quad u(x) = x^2+2x+1 \quad$ et $\quad v(x) = -x^3+2$

  On obtient $\quad u'(x) = 2x+2 \quad$ et $\quad v'(x) = -3x^2$

  Donc $\quad f'(x) = (2x+2)(-x^3+2)+(-3x^2)(x^2+2x+1)$

  $f'(x) = 2(x+1)(-x^3+2)+(-3x^2)(x+1)^2$

  $f'(x) = (x+1)\left(2(-x^3+2)+(-3x^2)(x+1)\right)$

  $f'(x) = (x+1)(-2x^3+4-3x^3-3x^2)$

  $f'(x) = (x+1)(-5x^3-3x^2+4)$

- **Dérivée de l'inverse d'une fonction, d'un quotient de fonctions :**

$$\text{Si } f(x) = \frac{1}{u(x)} \quad \text{alors} \quad f'(x) = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$$

$$\text{Si } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{alors} \quad f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Exemples :

- $f(x) = \dfrac{1}{4x-2}$

On pose $u(x)=4x-2$ donc $u'(x)=4$

$$f'(x)=-\frac{4}{(4x-2)^2}$$

$$f'(x)=-\frac{4}{(4x-2)^2}=-\frac{4}{16x^2-16x+4}=-\frac{1}{4x^2-4x+1}=-\frac{1}{(2x-1)^2}$$

➢ $f(x)=\dfrac{-3}{2(5+2x)}$

$$f(x)=\frac{-3}{2}.\frac{1}{5+2x}$$

On pose $u(x)=5+2x$ donc $u'(x)=2$

$$f'(x)=\frac{-3}{2}.\frac{-2}{(5+2x)^2}=\frac{3}{(5+2x)^2}$$

➢ $f(x)=\dfrac{4x+1}{3x-2}$

On pose $u(x)=4x+1$ donc $u'(x)=4$
Et $v(x)=3x-2$ donc $v'(x)=3$

$$f'(x)=\frac{4(3x-2)-3(4x+1)}{(3x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{12x-8-12x-3}{(3x-2)^2}=\frac{-11}{(3x-2)^2}$$

➢ $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+2x+1}$

On pose $u(x)=2x$ donc $u'(x)=2$
Et $v(x)=x^2+2x+1$ donc $v'(x)=2x+2$

$$f'(x)=\frac{2(x^2+2x+1)-2x.(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2(x+1)^2-4x(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-4x}{(x+1)^3}=\frac{-2x+2}{(x+1)^3} \text{ si } x\neq -1$$

- $f(x)=\dfrac{x^2}{4x-1}$

On pose $u(x)=x^2$ donc $u'(x)=2x$
Et $v(x)=4x-1$ donc $v'(x)=4$

$$f'(x)=\frac{2x(4x-1)-4x^2}{(4x-1)^2}$$
$$f'(x)=\frac{8x^2-2x-4x^2}{(4x-1)^2}=\frac{4x^2-2x}{(4x-1)^2}=\frac{2x(2x-1)}{(4x-1)^2}$$

4. Dérivées de fonctions composées du type $f(x) = v(ax+b)$

Si $f(x)=v(ax+b)$, alors $f'(x)=a.v'(ax+b)$ avec v une fonction dérivable.

Conséquences :

Si $f(x)=(ax+b)^n$, alors $f'(x)=a.n.(ax+b)^{n-1}$

Si $f(x)=\sqrt{ax+b}$, alors $f'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$ (avec $ax+b>0$)

Exemples :

- $f(x)=(2x-1)^2$

$f'(x)=2.2.(2x-1)$
$f'(x)=8x-4$

- $f(x)=(\sqrt{3}x+7)^4$

$f'(x)=4\sqrt{3}(\sqrt{3}x+7)^3$

- $f(x)=\dfrac{\left(-\frac{1}{2}x+3\right)^2}{4-x}$

On pose $u(x)=\left(-\frac{1}{2}x+3\right)^2$ donc $u'(x)=2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}x+3\right)=-\left(-\frac{1}{2}x+3\right)$

Et $v(x)=4-x$ donc $v'(x)=-1$

$$f'(x)=\frac{-\left(-\frac{1}{2}x+3\right)(4-x)-(-1)\left(-\frac{1}{2}x+3\right)^2}{(4-x)^2}$$

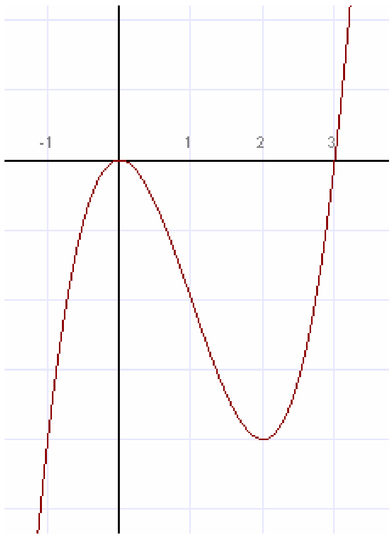
$$f'(x)=\frac{\left(-\frac{1}{2}x+3\right)\left((x-4)+\left(-\frac{1}{2}x+3\right)\right)}{(4-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\left(-\frac{1}{2}x+3\right)\left(\frac{1}{2}x-1\right)}{(4-x)^2}$$

IV. Recherche de tangentes à la courbe dérivée d'une fonction

On rappelle que l'équation de la tangente est de la forme : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

1. Premier exemple



On pose : $f(x)=x^3-3x^2$

Calculons $f'(x)$: $f'(x)=3x^2-6x$

- **Tangente à C_f en $(0;0)$: T_0**

Le point $(0;0)\in C_f$.
$f'(0)=0$ et $f(0)=0$ donc $T_0 : y=0$

T_0 est l'axe des abscisses.

Important :

Si $f'(a)=0$, la tangente au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisse.

- **Tangente à C_f en $A(-1;-4)$: T_A**

  Le point $A(-1;-4) \in C_f$.
  $f'(-1) = 9$ et $f(-1) = -4$ donc $T_A : y = 9(x+1) - 4$
  $T_A : y = 9x + 9 - 4$
  $T_A : y = 9x + 5$

- **Tangente à C_f en $B(1;-2)$: T_B**

  Le point $B(1;-2) \in C_f$.
  $f'(1) = -3$ et $f(1) = -2$ donc $T_B : y = -3(x-1) - 2$
  $T_B : y = -3x + 3 - 2$
  $T_B : y = -3x + 1$

2. Deuxième exemple :

Soit la fonction f qui à x associe $f(x) = 3x^3 - 4x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ et C sa courbe représentative.

Déterminer dans chacun des cas suivants les coordonnées des points de C où la tangente :

a) admet 5 pour coefficient directeur.
b) est parallèle à la droite d'équation $y = x + 2$.
c) est parallèle à la droite d'équation $y = -5x + 2$.

Solutions :

Tout d'abord, calculons $f'(x)$:
$f'(x) = 9x^2 - 4$

a) Tangente de coefficient directeur 5.

L'abscisse a du point de C où la tangente a pour coefficient directeur 5 vérifie : $f'(a) = 5$.
$9.a^2 - 4 = 5$
$9.a^2 = 9$
$a^2 = 1$
donc $a = 1$ ou $a' = -1$

Il existe donc 2 tangentes de coefficient directeur 5 qui sont les 2 points de C d'abscisses 1 et -1 :

$A(1;0)$ et $A'(-1;2)$

$T_A : y = 5(x-1)+0$ et $T_{A'} : y = 5(x+1)+2$
$T_A : y = 5x-5$ et $T_{A'} : y = 5x+7$

b) Tangente parallèle à la droite d'équation $y = x+2$.

Si la tangente est parallèle à cette droite, elle a le même coefficient directeur, donc on recherche les tangentes de coefficient directeur 1. La question est alors semblable à la précédente.

L'abscisse a du point de C où la tangente a pour coefficient directeur 1 vérifie : $f'(a)=1$.

$9.a^2 - 4 = 1$
$9.a^2 = 5$
$a^2 = \frac{5}{9}$

donc $a = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ou $a' = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Il existe donc 2 tangentes de coefficient directeur 1 qui sont les 2 points de C d'abscisses $\frac{\sqrt{5}}{3}$ et $-\frac{\sqrt{5}}{3}$:

$B\left(\frac{\sqrt{5}}{3};\frac{9-7\sqrt{5}}{9}\right)$ et $B'\left(-\frac{\sqrt{5}}{3};\frac{9+7\sqrt{5}}{9}\right)$

c) Tangente parallèle à la droite d'équation $y = -5x+2$.

Ce sont les tangentes de coefficient directeur -5.
L'abscisse a du point de C où la tangente a pour coefficient directeur 1 vérifie : $f'(a) = -5$.

$9.a^2 - 4 = -5$
$9.a^2 = -1$
$a^2 = -\frac{1}{9}$ cette équation n'a pas de solution (un carré ne peut pas être négatif).

Il n'existe pas de tangente parallèle à la droite d'équation $y = -5x+2$.

V. Dérivée et sens de variation d'une fonction

☝ **Chapitre très important !**

1. Théorème donnant le sens de variation à partir du signe de la dérivée :

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle *I*.

- Si pour tout x de I on a $f'(x) \geq 0$ alors *f* est croissante sur *I*.
- Si pour tout x de I on a $f'(x) \leq 0$ alors *f* est décroissante sur *I*.
- Si pour tout x de I on a $f'(x) = 0$ alors *f* est constante sur *I*.

2. Exemples d'utilisation :

➢ **Comment utiliser ce théorème ?**

Lorsqu'on souhaite étudier le sens de variation d'une fonction f sur un intervalle I :

- On calcule $f'(x)$ sur I .
- On étudie le signe de $f'(x)$ sur I .
- On en déduit le tableau de variation de *f* sur I .

➢ **Exemples :**

Dans les exemples suivants, préciser l'ensemble de définition de la fonction à étudier et donner son tableau de variation.

1^er^ exemple :

$f(x) = x^2 - 4x + 3$

Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x - 4$

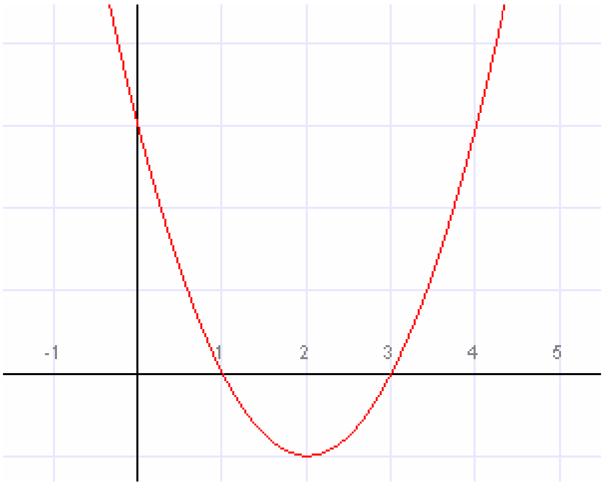
On voit que $f'(x) = 0$ si $x = 2$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		-	0	+	
Variations de $f(x)$		↘	-1	↗	

$f(x)$ admet un minimum égal à -1 pour $x = 2$.

Si on trace la courbe :



$2^{ème}$ exemple :

$f(x) = \dfrac{4x+1}{x+1}$

$f(x)$ existe si le dénominateur est différent de 0, donc si $x+1 \neq 0$ soit $x \neq -1$

Donc $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

Calculons $f'(x)$:

On pose $u(x) = 4x+1$ donc $u'(x) = 4$
et $v(x) = x+1$ donc $v'(x) = 1$

On a $f'(x) = \dfrac{4(x+1)-1(4x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

Pour tout $x \neq -1$, on a $f'(x) > 0$

Tableau de variation de *f* :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	‖	+	
Variations de $f(x)$		↗	‖	↗	

Si on trace la courbe :

3

3ème exemple :

$f(x) = 3x^3 - 4x + 1$

Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 9x^2 - 4$

$f'(x) = (3x-2)(3x+2)$

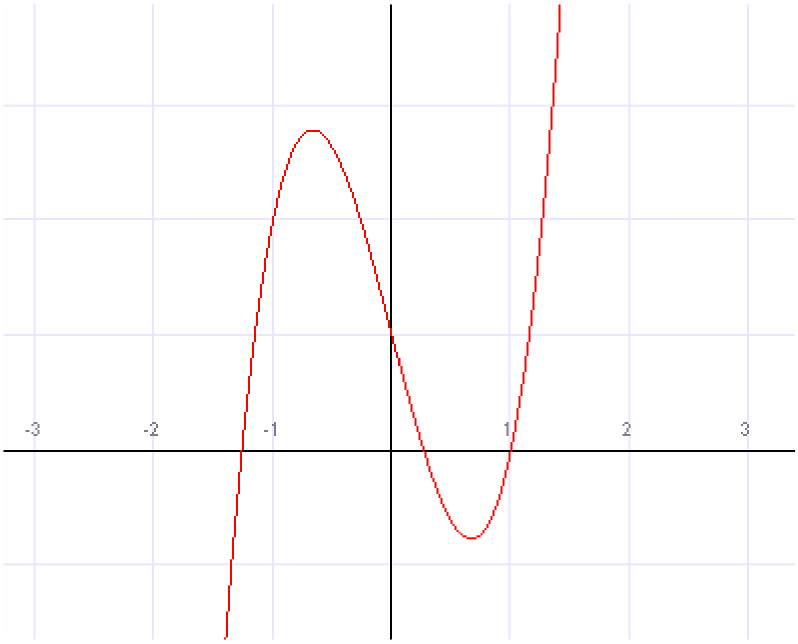
On voit que $f'(x) = 0$ si $x = \frac{2}{3}$ ou si $x = -\frac{2}{3}$

Tableau de variation de *f* :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+	
Variations de $f(x)$		↗	$\frac{25}{9}$	↘	$-\frac{7}{9}$	↗	

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 4\left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{8}{9} + \frac{8}{3} + 1 = \frac{25}{9}$ et $f\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{2}{3}\right) + 1 = \frac{8}{9} - \frac{8}{3} + 1 = \frac{-7}{9}$

Si on trace la courbe :



4ème exemple :

$f(x) = (x+1)(2x-1)^2$

Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$

Calculons $f'(x)$:

On pose $u(x) = (2x-1)^2$ donc $u'(x) = 2\times 2\times(2x-1) = 4(2x-1)$
et $v(x) = x+1$ donc $v'(x) = 1$

On a $f'(x) = 1(2x-1)^2 + 4(2x-1)(x+1)$
$f'(x) = (2x-1)((2x-1)+4(x+1))$
$f'(x) = (2x-1)(2x-1+4x+4)$
$f'(x) = (2x-1)(6x+3)$

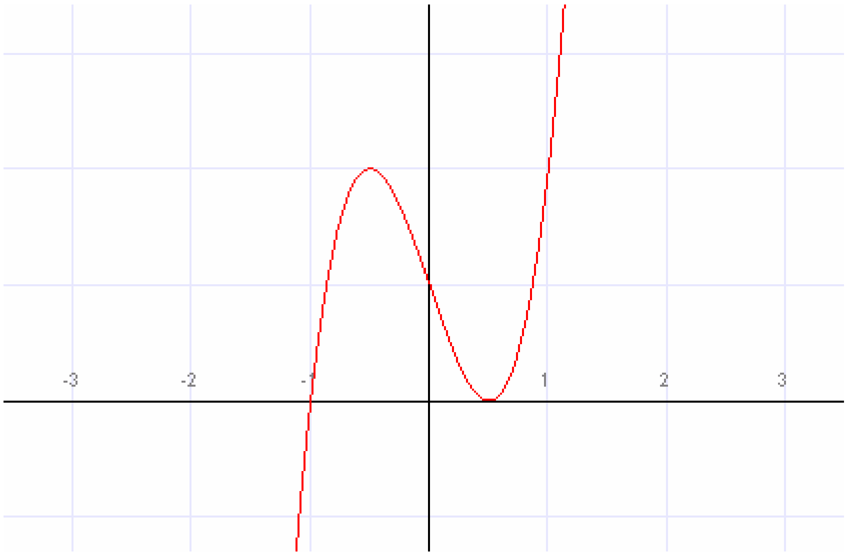
On voit que $f'(x) = 0$ si $x = \frac{1}{2}$ ou si $x = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

Tableau de variation de *f* :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+	
Variations de $f(x)$		↗	2	↘	0	↗	

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right)^2=\frac{1}{2}(-2)^2=2 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-1\right)^2=\frac{3}{2}(0)^2=0$$

Si on trace la courbe :



➢ Encadrement d'une fonction sur un intervalle :

Déterminer à l'aide du tableau de variation un encadrement de l'image l'intervalle $I=[-1;2]$ pour les fonctions *f* suivantes :

➢ $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$

$D_f=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

$f'(x)=\dfrac{-1}{(x-3)^2}$

Sur $I=[-1;2]$, $f'(x)<0$

Traçons le tableau de variation de f sur $I=[-1;2]$:

x	-1		2
Signe de $f'(x)$		-	
Variations de $f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	-1

$f(-1)=-\frac{1}{4}$ et $f(2)=-1$

D'après le tableau de variation, l'image de $I=[-1;2]$ par f est l'intervalle $\left[-1;-\frac{1}{4}\right]$.

- $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2-9}$

$D_f=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

$f'(x)=\dfrac{-3x^2-2x-27}{(x^2-9)^2}$

$(x^2-9)^2>0$ quelque soit $x\in D_f$ donc $f'(x)$ est du signe de $-3x^2-2x-27$.

Etudions le signe de $-3x^2-2x-27$:

$\Delta=4-4(-3)(-27)<0$ donc $-3x^2-2x-2<0$ sur $I=[-1;2]$, donc $f'(x)<0$ sur $I=[-1;2]$.

Traçons le tableau de variation de f sur $I=[-1;2]$:

x	-1		2
Signe de $f'(x)$		-	
Variations de $f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\frac{7}{5}$

D'après le tableau de variation, l'image de $I=[-1;2]$ par f est l'intervalle $\left[-\frac{7}{5};\frac{1}{4}\right]$.

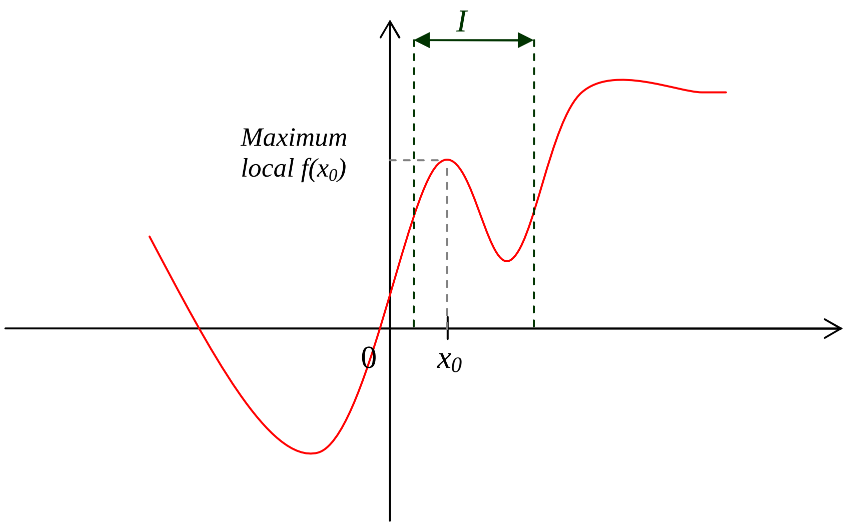
VI. Dérivée et extremum local d'une fonction

1. Définitions :

Soit *f* une fonction définie sur un ensemble *D*.

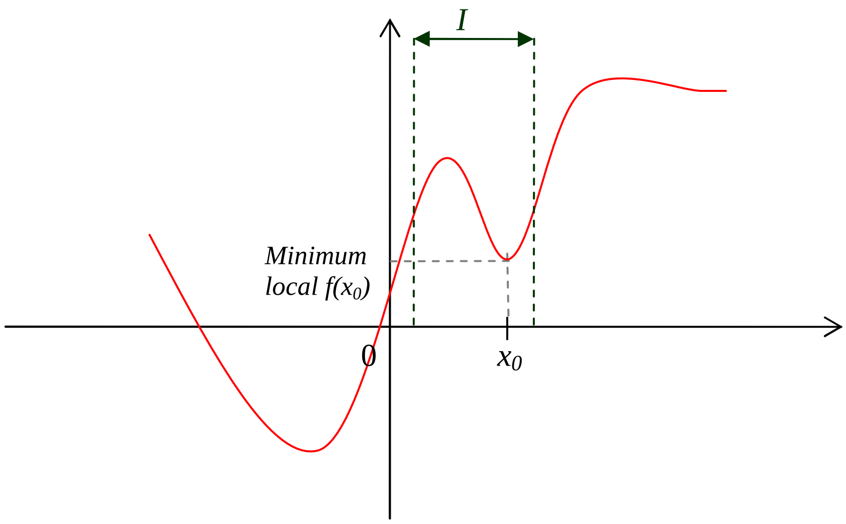
- Dire que $f(x_0)$ est un maximum local de *f* sur *D* signifie qu'il existe un intervalle *I* contenu dans *D* tel que pour tout $x \in I$, on ait :

$$f(x) \leq f(x_0)$$



- Dire que $f(x_0)$ est un minimum local de *f* sur *D* signifie qu'il existe un intervalle *I* contenu dans *D* tel que pour tout $x \in I$, on ait :

$$f(x) \geq f(x_0)$$



Exemple :

Dans le 3ème exemple du V.2., $\frac{25}{9}$ est un maximum local obtenu pour $x=-\frac{1}{2}$, et $-\frac{7}{9}$ est un minimum local obtenu pour $x=\frac{1}{2}$.

2. Extremum et racine de la dérivée :

Soit *f* une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert *I*. Si *f* admet un extremum en $x_0 \in I$, alors $f'(x_0)=0$.

Soit *f* une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert *I*. Si la dérivée f' de f s'annule et change de signe en un point $x_0 \in I$, alors $f(x_0)$ est un extremum de la fonction.