# Limites de suites

## I. Généralités sur les limites de suites

### 1. Suite convergente

On considère qu'une suite admet une limite *l*, ou converge vers *l*, lorsque :

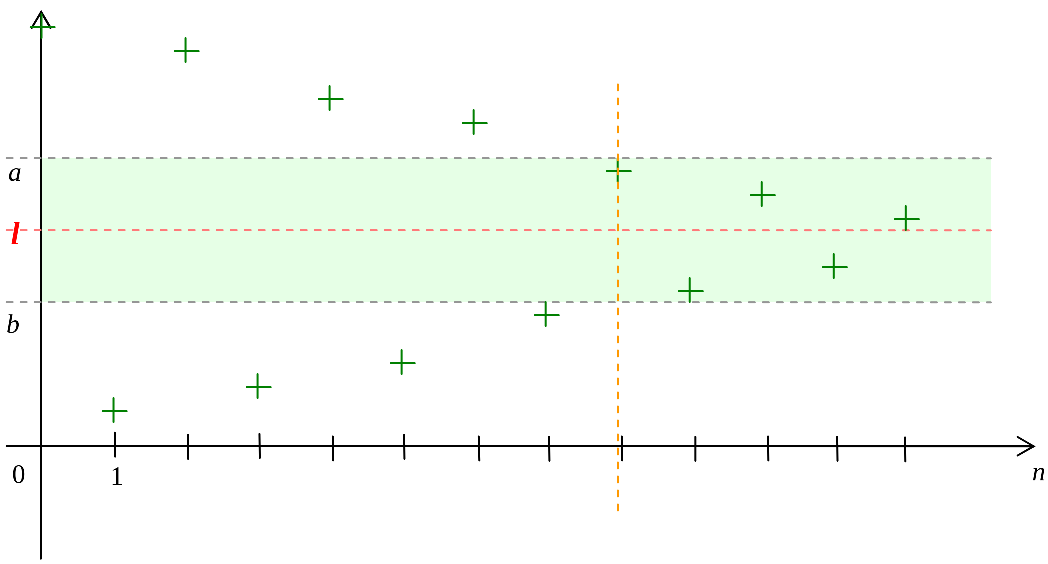
tout intervalle ouvert contenant *l* contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

En termes plus formels :

Quelque soient *a*, *b* tels que $l \in \left]a, b\right[$ , il existe un rang *N* tel que pour tout indice *n*, on ait :

$$n > N \Rightarrow u_n \in \left]a, b\right[$$

***Interprétation graphique :***




A partir d'un certain rang, tous les points de la suite sont à l'intérieur de la « bande » délimitée par *a* et *b*.

***Exemples :***

- $u_n = \dfrac{1}{n^2}$

  $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$

  La suite converge vers 0.

- $u_n = 1 + (0{,}1)^n$

  $u_n - 1 = (0{,}1)^n = \left(\dfrac{1}{10}\right)^n = \dfrac{1}{10^n} = 10^{-n}$

  La suite de terme $u_n - 1$ converge vers 0 donc la suite de terme $u_n$ converge vers 1.

## 2. Suites de référence de limite nulle

Les suites de terme général $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{n^3}$, … , $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $q^n$ avec $0 < q < 1$ sont des suites qui convergent vers 0.

***Exemples :***

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{7}\right)^n = 0$ car $0 < \dfrac{1}{7} < 1$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^8} = 0$

## 3. Suites de limite infinie

Certaines suites ont une limite infinie.

| |
|---|
| Soit la suite de terme général $u_n$.<br>S’il existe un rang $N$ à partir duquel $u_n$ est supérieur à n’importe quel nombre positif, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ |

***Exemples :***

- Soit la suite de terme général $u_n = 4^n$.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

- Soit la suite de terme général $u_n = n^3$.

  $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Les suites de terme général $n$, $n^2$, $n^3$, $\sqrt{n}$, $q^n$ avec $q > 1$ tendent vers $+\infty$.

### 4. Suites divergentes

| |
|---|
| Une suite est divergente si elle n'est pas convergente. |

Donc une suite est divergente si :
- Elle a une limite infinie : $-\infty$ ou $+\infty$
- Elle n'a pas de limite.

***Exemples :***

- $u_n = n^3 - 6$, on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc la suite est divergente.

- $u_n = (-1)^n$ : on a $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = -1$, $u_3 = -1$… donc la suite est divergente.

## II. Calcul de limites de suites

### 1. Cas où la suite est donnée sous la forme $u_n = g(n)$

| |
|---|
| Soit une suite de terme général $u_n = g(n)$.<br>Si $\lim_{x \to +\infty} g(x) = l$, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ |

***Exemple :***

Soit la suite de terme général $u_n = \dfrac{3n+1}{n+4}$.

On pose $g(x) = \dfrac{3x+1}{x+4}$.

Calculons la limite de $g(x)$ quand $x \to +\infty$ :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x+1}{x}}{\frac{x+4}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{3}{1} = 3$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$. La suite converge vers 3.

## 2. Théorèmes des gendarmes

➢ **Théorème des gendarmes pour une limite finie :**

Soient $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ trois suites telles que à partir d'un certain rang, on ait :

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

Si $(u_n)$ et $(w_n)$ convergent vers *l* ($l \in \mathbb{R}$), alors $(v_n)$ converge aussi vers *l*.

**Démonstration :**

Soit une suite $(v_n)$.
On suppose qu'il existe deux suites $(u_n)$ et $(w_n)$ telles que :
– à partir d'un certain rang, on ait $u_n \leq v_n \leq w_n$
– $(u_n)$ et $(w_n)$ convergent vers *l*.

Puisque $(u_n)$ converge vers *l*, tout intervalle ouvert contenant *l* contient tous les termes de $(u_n)$ à partir d'un certain rang. De même $(w_n)$ converge vers *l*, donc tout intervalle ouvert contenant *l* contient tous les termes de $(w_n)$ à partir d'un certain rang.

Comme à partir d'un certain rang, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$, $v_n$, on peut en déduire que tout intervalle ouvert contenant *l* contient tous les termes de $(v_n)$ à partir de d'un certain rang.
Donc $(v_n)$ converge aussi vers *l*.

### ➢ Théorème des gendarmes pour une limite infinie :

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites.
- Si, à partir d'un certain rang, on a : $u_n \geq v_n$ et $(v_n)$ tend vers $+\infty$, alors la suite $(u_n)$ tend également vers $+\infty$.
- Si, à partir d'un certain rang, on a : $u_n \leq v_n$ et $(v_n)$ tend vers $-\infty$, alors la suite $(u_n)$ tend également vers $-\infty$.

## 3. Opérations sur les limites de suites

Les théorèmes sont les mêmes que pour les opérations sur les limites de fonctions :

### ➢ Limite d'une somme de suites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = l + l'$$

### ➢ Limite du produit par un nombre

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} k \times u_n = k \times l$ $(k \in \mathbb{R})$

### ➢ Limite d'un produit de suites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = l \times l'$$

### ➢ Limite d'un quotient de suites

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{l}{l'}$$

## 4. Cas particulier des limites de suites géométriques

Soit une suite géométrique de terme général $u_n = q^n$.

| **Conditions sur *q*** | **Limite** | **Exemple** |
|---|---|---|
| $q \leq -1$ | $q^n$ n'a pas de limite | $(-1{,}1)^n$ n'a pas de limite |
| $-1 < q < 1$ | $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ | $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ |
| $q = 1$ | $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$ ($u_n$ est constante) | $\lim\limits_{n \to +\infty} 1^n = 1$ |
| $q > 1$ | $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ | $\lim\limits_{n \to +\infty} (1{,}0001)^n = +\infty$ |

## 5. Exemples de limite de somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

***Exemple 1 :***

$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$, somme des termes consécutifs de la suite géométrique de terme général $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

On pose $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$

On a $S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Or $S_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$

Donc $S_n = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ donc $S = 2$

***Exemple 2 :***

$S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots + \frac{1}{10^n} + \ldots$,

$$S_n = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots + \frac{1}{10^n}$$

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}\left(1-(0,1)^{n+1}\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{10}{9}$ donc $S = \frac{10}{9}$.

### 6. Cas particulier des limites de suites arithmétiques

Soit une suite arithmétique de terme général $u_n = u_0 + nr$.

- Si $r > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

***Exemple :***

Soit la suite de terme général $u_n = u_0 - 0,001 \times n$ avec $u_0 = -12$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

## III. Problème d'application de calcul de limite

### 1. Premier problème

Soit la suite de terme général $u_n$ définie par :

$u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$

1 – Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2 – Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n - 2$ est une suite géométrique.
3 – En déduire une expression de $v_n$, puis de $u_n$ en fonction de *n*.

4 – Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante et minorée.

5 – Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

6 – Exprimer, en fonction de *n*, la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.

7 – La suite $(S_n)$ est-elle convergente ?

***Solutions :***

**1 – Calculer les 5 premiers termes de la suite.**

$$u_0 = 5$$
$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 1 = \frac{1}{2}\times 5 + 1 = \frac{7}{2}$$
$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 = \frac{1}{2}\times\frac{7}{2} + 1 = \frac{11}{4}$$
$$u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 1 = \frac{1}{2}\times\frac{11}{4} + 1 = \frac{19}{8}$$
$$u_4 = \frac{1}{2}u_3 + 1 = \frac{1}{2}\times\frac{19}{8} + 1 = \frac{35}{16}$$

**2 – Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n - 2$ est une suite géométrique.**

$$v_n = u_n - 2$$

donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2)$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}(u_n - 2)}{u_n - 2} = \frac{1}{2}$$

La suite $(v_n)$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

**3 – En déduire une expression de $v_n$, puis de $u_n$ en fonction de *n*.**

$(v_n)$ est donc de la forme $v_0 q^n$.

$v_0 = u_0 - 2 = 5 - 2 = 3$ et $q = \frac{1}{2}$ (raison) donc :

$$v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$v_n = \frac{3}{2^n}$$

Or $v_n = u_n - 2$ donc $u_n = v_n + 2 = \dfrac{3}{2^n} + 2$

**4 – Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante et minorée.**

$u_n = \dfrac{3}{2^n} + 2$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{3}{2^n} > 0$ donc $\dfrac{3}{2^n} + 2 > 2$ donc $u_n > 2$. La suite est minorée par 2.

Cherchons le sens de variation de $(u_n)$. Pour cela, cherchons le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{2^{n+1}} + 2 - \frac{3}{2^n} - 2 = \frac{3}{2^n}\left(\frac{1}{2} - 1\right)$$
$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{2^{n+1}} + 2 - \frac{3}{2^n} - 2 = \frac{3}{2^{n+1}} - \frac{3}{2^n} = \frac{3}{2^{n+1}} - \frac{3\times 2}{2^{n+1}} = -\frac{3}{2^{n+1}}$$

Pour tout *n*, on a $2^{n+1} > 0$, donc $-\dfrac{3}{2^{n+1}} < 0$. Donc pour tout *n*, on a $u_{n+1} - u_n < 0$.

La suite $(u_n)$ est décroissante.

**5 – Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.**

$$u_n = \frac{3}{2^n} + 2 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ car $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

**6 – Exprimer, en fonction de *n*, la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.**

$$S_n = \left(2 + \frac{3}{2^0}\right) + \left(2 + \frac{3}{2^1}\right) + \left(2 + \frac{3}{2^2}\right) + ... + \left(2 + \frac{3}{2^n}\right)$$
$$S_n = 2(n+1) + 3\left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\right) = 2(n+1) + 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n}\right)$$

Or $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

Donc $S_n = 2(n+1) + 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

**7 – La suite $(S_n)$ est-elle convergente ?**

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1$.

$\lim_{n\to+\infty} 2(n+1) = +\infty$

Donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

## 2. Deuxième problème

Soit la suite de terme général $u_n$ définie par :

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 20}{5}$

1 – Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2 – Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n - 5$ est une suite géométrique.
3 – En déduire une expression de $v_n$, puis de $u_n$ en fonction de *n*.
4 – Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante et majorée.
5 – Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.
6 – Exprimer, en fonction de *n*, la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.
7 – La suite $(S_n)$ est-elle convergente ?

***Solutions :***

**1 – Calculer les 5 premiers termes de la suite.**

$u_0 = 0$

$u_1 = \frac{0+20}{5} = 4$

$u_2 = \frac{4+20}{5} = \frac{24}{5}$

$u_3 = \frac{\frac{24}{5} + 20}{5} = \frac{124}{25}$

$$u_4 = \frac{\frac{124}{25}+20}{5} = \frac{624}{125}$$

**2 – Montrer que la suite de terme général $v_n = u_n - 5$ est une suite géométrique.**

$v_n = u_n - 5$

donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = \frac{u_n + 20}{5} - 5 = \frac{u_n - 5}{5}$

$v_{n+1} = \frac{v_n + 5 - 5}{5} = \frac{v_n}{5}$

La suite $(v_n)$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{5}$, son premier terme est $v_0 = u_0 - 5 = -5$

**3 – En déduire une expression de $v_n$, puis de $u_n$ en fonction de *n*.**

$(v_n)$ est donc de la forme $v_0 q^n$ : $v_n = -5\left(\frac{1}{5}\right)^n$

Ou encore : $v_n = \frac{-1}{5^{n-1}}$

$v_n = u_n - 5$ donc $u_n = v_n + 5 = v_n = 5 - \frac{1}{5^{n-1}}$

**4 – Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante et majorée.**

Calculons $u_{n+1} - u_n$ :

$u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{1}{5^n} - \left(5 - \frac{1}{5^{n-1}}\right) = -\frac{1}{5^n} + \frac{1}{5^{n-1}} = \frac{-1+5}{5^n} = \frac{4}{5^n}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{4}{5^n} > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite $(u_n)$ est donc croissante.

De plus, $u_n = 5 - \frac{1}{5^{n-1}}$ avec $\frac{1}{5^{n-1}} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $u_n < 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(u_n)$ est majorée par 5.

**5 – Montrer que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.**

$u_n = 5 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$ car $0 < \frac{1}{5} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.

La suite $(u_n)$ converge vers 5.

**6 – Exprimer, en fonction de *n*, la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.**

$$S_n = 0 + \left(5 - \frac{1}{5^0}\right) + \left(5 - \frac{1}{5^1}\right) + ... + \left(5 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

$$S_n = 5n - \left(\frac{1}{5^0} + \frac{1}{5^1} + ... + \frac{1}{5^{n-1}}\right) = 5n - \left(1 + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

$$S_n = 5n - \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}}$$

$$S_n = 5n - \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

**7 – La suite $(S_n)$ est-elle convergente ?**

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{5} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n = 1$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 5n = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$