Fonctions numériques d'une variable réelle

Dans la suite, f est une fonction de R dans R et son ensemble de définition est noté D_f.

On note alors :

$D_f = \{x \in R \,;\, f(x) \text{ existe}\}$

On note C_f sa courbe représentative.

I. Limites :

Si $x_0 \in D_f$, on admet que pour les fonctions rencontrées, on a $\lim(x\to x_0) f(x) = f(x_0)$.
→ Prononcer : la limite de f de x quand x tend vers x_0 est f de x_0

En général, on recherche les limites aux bornes ouvertes de D_f.

1. Limites usuelles :

Une fonction polynôme a la même limite en ± ∞ que son terme de plus haut degré.

Exemple : $\lim(x\to -\infty)(2x^3-x^2+1) = \lim(x\to -\infty) 2x^3 = -\infty$

Une fonction rationnelle a la même limite en ± ∞ que le quotient de ses termes de plus haut degré.

Exemple : $\lim(x\to +\infty) \dfrac{2x^2-1}{x+3} = \lim(x\to +\infty)\dfrac{2x^2}{x} = \lim(x\to +\infty) 2x = +\infty$

Remarque :

Limite en – 3 de $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x+3}$

$\lim (x\to -3)(2x^2-1) = 17$

$\lim (x\to -3)(x+3) = 0$

Donc $\dfrac{2x^2-1}{x+3}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Or : $\lim (x\to -3^+)(x+3) = 0^+$ donc $\lim(x\to -3^+) \dfrac{2x^2-1}{x+3} = +\infty$

lim ($x \to -3^+$) veut dire que x se rapproche de la valeur -3, mais en lui restant supérieure (exemples : -2,95 ou -2,999…) donc la limite de x+3 se rapprochera de 0, mais sera une valeur positive (-2,999+3=0,001>0) notée 0^+. Donc la limite est $+\infty$.

et lim ($x \to -3^-$) (x+3) = 0^- donc lim($x \to -3^-$) $\frac{2x^2-1}{x+3} = -\infty$

Ici, lim ($x \to -3^-$) veut dire que x se rapproche de la valeur -3, mais en lui restant inférieure (exemples : -3,05 ou -3,001…) donc la limite de $x+3$ se rapprochera de 0 mais sera une valeur négative.

2. Théorèmes de comparaison :

Si, pour x suffisamment proche de 0, on a $|f(x)| \leq u(x)$ avec lim($x \to 0$) u(x) = 0, alors :

lim($x \to 0$) f(x) = 0

Exemple d'application :

Trouver : lim($x \to 0$) $x.\sin\frac{1}{x}$

Si $x \neq 0$, on a $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ (cf. propriétés de la fonction sinus)

Donc si x > 0, on a alors : $-x \leq x.\sin\frac{1}{x} \leq x$

et si x < 0, on a alors : $x \leq x.\sin\frac{1}{x} \leq -x$ (inversion du sens de l'inégalité lorsqu'on multiplie par une valeur négative)

Donc, dans tous les cas : $\left| x.\sin\frac{1}{x} \right| \leq |x|$

Comme lim($x \to 0$) x = 0, grâce au théorème exposé ci-dessus, on peut conclure que : lim($x \to 0$) $x.\sin\frac{1}{x} = 0$.

Si, pour x suffisamment grand, on a $|f(x)-m| \leq u(x)$ avec lim($x \to +\infty$) u(x) = 0, alors :

lim($x \to +\infty$) $f(x)$ = m

Exemple d'application :

$$f(x) = \frac{4\sin x + 3x}{x-1}$$

Trouver lim(x→ $+\infty$) f(x).

$f(x) - 3 = \frac{4\sin x + 3x}{x-1}$ -3 = $\frac{4\sin x + 3x}{x-1}$ - $\frac{3x-3}{x-1}$ = $\frac{4\sin x + 3}{x-1}$

Or : $-1 \leq \sin x \leq 1$

$-1 \leq 4.\sin x + 3 \leq 7$

Pour x > 1, on a x-1 > 0, donc : $\frac{-1}{x-1} \leq \frac{4\sin x + 3x}{x-1} \leq \frac{7}{x-1}$

$$\frac{-1}{x-1} \leq f(x) - 3 \leq \frac{7}{x-1}$$

Comme $\frac{-7}{x-1} < \frac{-1}{x-1}$ pour x > 1, on a : $|f(x) - 3| \leq |\frac{7}{x-1}|$

Comme Or lim(x→ $+\infty$) $\frac{7}{x-1}$ = 0, grâce au théorème exposé ci-dessus, on peut conclure que :

lim(x→ $+\infty$) f(x) = 3

3. Limites d'une fonction composée :

Si lim(x→x_0) g(x) = y_0 et lim(y→y_0) h(y) = z_0

alors lim(x→x_0) (hog)(x) = z_0

Remarque : (hog)(x) est équivalent à h(g(x)).

On suppose que $x_0 \in D_f$ ou que x_0 est une borne ouverte de D_f et que $y_0 \in D_g$ ou que y_0 est une borne ouverte de D_g.

Exemple 1 : f(x) = $\sqrt{x^2+1}$

Trouver lim(x→ $+\infty$) f(x).

On peut décomposer f comme suit : x $\mapsto$ $x^2+1 \mapsto \sqrt{x^2+1}$

On pose donc une fonction h telle que $h(x) = \sqrt{x}$
Et une fonction g telle que $g(x) = x^2+1$

On a : $f(x) = h(g(x)) = (h \circ g)(x)$

Or $\lim(x \to +\infty)\ (x^2+1) = \lim(x \to +\infty)\ g(x) = +\infty$

$\downarrow$

et $\lim(y \to +\infty)\ \sqrt{y} == \lim(y \to +\infty)\ h(y) = +\infty$

donc $\lim(x \to +\infty)\ h(g(x)) = \lim(x \to +\infty)\ \sqrt{x^2+1} = +\infty$

Exemple 2 : $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{x}$

Trouver $\lim(x \to 0)\ f(x)$

On peut décomposer f comme suit : x $\mapsto 3x \mapsto \dfrac{\sin 3x}{x}$

On pose donc une fonction h telle que $h(x) = \dfrac{\sin y}{\frac{1}{3}y} = 3.\dfrac{\sin y}{y}$

Et une fonction g telle que $g(x) = 3x$

On a donc : $f(x) = h(g(x)) = (h \circ g)(x)$

$\lim(x \to 0)\ g(x) = \lim(x \to 0)\ 3x = 0$

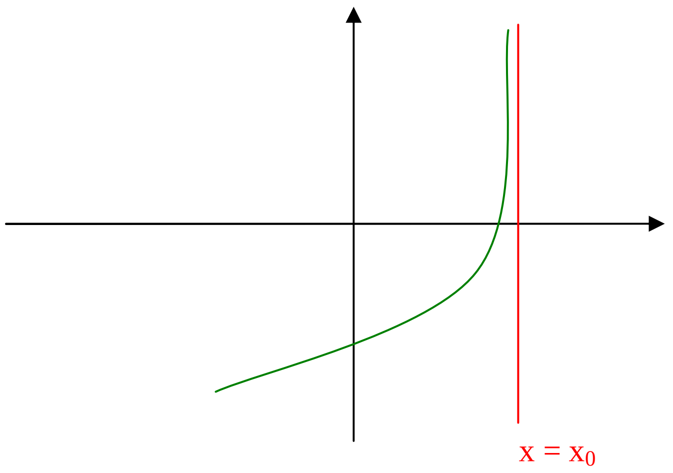
$\downarrow$

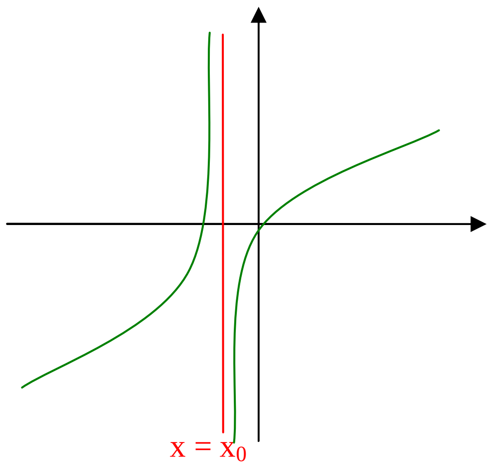
$\lim(y \to 0)\ h(x) = \lim(y \to 0)\ 3.\dfrac{\sin y}{y} = 3$

Donc $\lim(x \to 0)\ \dfrac{\sin 3x}{x} = 3$

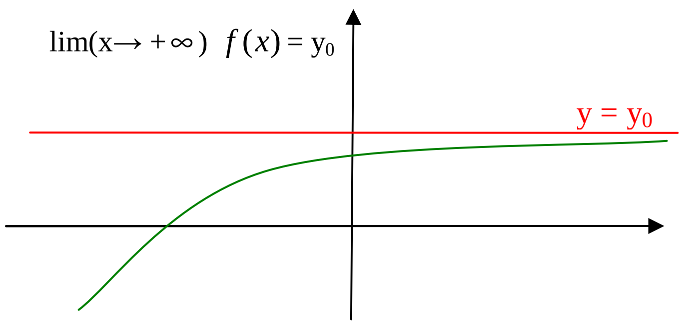
4. Interprétation graphique des limites :

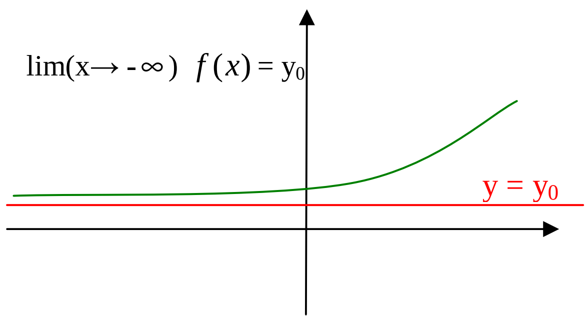
Si lim(x→ x_0) $f(x) = \pm\infty$, alors C_f admet une asymptote d'équation x = x_0.





Si lim(x→ $\pm\infty$) $f(x)$ = y_0, alors C_f admet une asymptote d'équation y = y_0.





Si lim(x→ $\pm\infty$) $f(x) = \pm\infty$, il est impossible de conclure a priori.

Dans ce cas, la droite D d'équation y = mx + p est une asymptote de C_f au voisinage de $+\infty$ si lim(x→ $+\infty$) ($f(x)$ – (mx + p)) = 0 .

Si cette limite est 0+, C_f est au dessus de la droite D au voisinage de $+\infty$.

Il est parfois utile de connaître la position de C_f par rapport à la droite D sur tout l'ensemble de définition D_f de la fonction f (et pas seulement en + ou - ∞). Pour cela, il faut étudier le signe de $f(x)$ – (mx + p).

Exemple : $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$

Quel est l'ensemble de définition de f ? Déterminer les limites aux bornes ouvertes de D_f et les asymptotes (essayer avec une courbe d'équation $y = x^2$…)

Ensemble de définition : la seule contrainte est que le dénominateur ne doit pas être égal à 0, donc on a obligatoirement $x \neq 0$.
Donc $D_f = R^*$ (c'est-à-dire tout R, sauf 0).
Il faudra donc chercher les limites en $+\infty$, $-\infty$, 0^+ et 0^- (ce sont les 4 bornes ouvertes de l'ensemble de définition).

Limites en $+\infty$ et $-\infty$:

$\lim(x\to\pm\infty)\ \dfrac{x^3+1}{x} = \lim(x\to\pm\infty)\ \dfrac{x^3}{x} = \lim(x\to\pm\infty)\ x^2$

Donc $\lim(x\to+\infty)\ f(x) = \lim(x\to-\infty)\ f(x) = +\infty$

Limites en 0 :

$\lim(x\to 0^+)\ x = 0^+$ et $\lim(x\to 0^+)\ x^3+1 = 1$ donc $\lim(x\to 0^+)\ f(x) = +\infty$

$\lim(x\to 0^-)\ x = 0^-$ et $\lim(x\to 0^-)\ x^3+1 = 1$ donc $\lim(x\to 0^-)\ f(x) = -\infty$

C_f admet une asymptote d'équation $x = 0$.

La droite d'équation $y = x^2$ est-elle une asymptote de C_f ?

$\lim(x\to\pm\infty)\ f(x) - x^2 = \lim(x\to\pm\infty)\ \dfrac{1}{x} = 0$

Donc la droite d'équation $y = x^2$ est bien une asymptote de C_f au voisinage de + et $-\infty$.

II. Bijections :

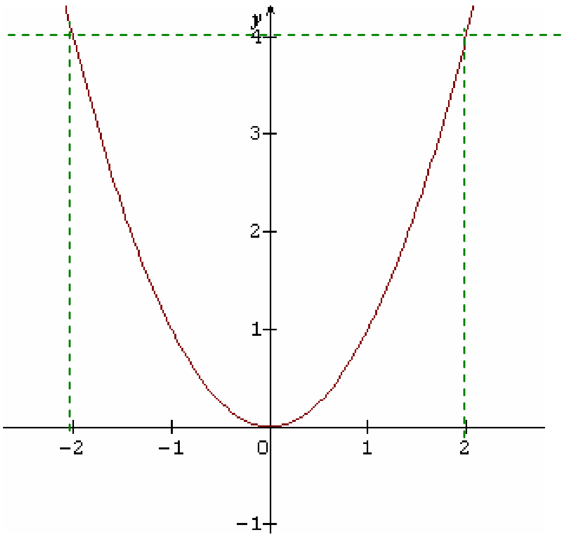
1. Définition :

f est une bijection de I sur J si f est une application de I sur J et que pour tout $y\in$ J, **il existe un et un seul** $x\in$ I tel que $f(x) = y$.

💣 Différence avec une fonction : pour $y\in$ J, il peut exister plusieurs x tels que $f(x) = y$.

La fonction carrée $f(x) = x^2$ est une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur $[0 ; +\infty[$, mais n'est pas une bijection de R sur R.

Il est donc important de toujours préciser sur quels intervalles on se place.



Par exemple, pour y = 4, sur R on peut avoir x = 2 ou x = -2. En revanche, sur [0 ; $+\infty$[une seule valeur de x existe telle que $f(x) = y = x^2 = 4$, à savoir x=2.

2. Image d'un intervalle :

L'image d'un intervalle par une bijection est un intervalle.

De plus, f ([a,b]) = [f (a) , f (b)] ou [f (b) , f (a)]

Si a est une borne ouverte, on écrit :] lim(x→ a^+) f (x) , f (b)]

Exercice d'application :
Montrer que la fonction f telle que f (x) = $2x^2 + 1$ est une bijection de [0 ; $+\infty$ [sur [1 ; $+\infty$[.

Soit $y_0 \geq 1$, on résout l'équation

$$2x^2+1 = y_0$$
$$2x^2 = y_0 - 1$$
$$x^2 = \frac{y_0 - 1}{2} \geq 0$$

Si $x \geq 0$, on a $x = \sqrt{\frac{y_0 - 1}{2}}$

Pour tout $y_0 \geq 1$, il existe un $x_0 \geq 0$ unique tel que $y_0 = f(x_0)$. La fonction f est donc une bijection de [0 ; $+\infty$ [sur [1 ; $+\infty$ [.

<u>Théorème :</u>

Si f est une fonction dérivable et strictement monotone sur l'intervalle I, alors f est une bijection de I sur f (I).

Exemple : f (x) = x – sin x

f est dérivable sur R.

De plus f '(x) = 1 – cos x. Sur l'intervalle $]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}[$ on a f '(x) > 0 donc f strictement monotone, donc f est une bijection de $]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}[$ sur $]f(\frac{\pi}{2}); f(\frac{3\pi}{2})[=]\frac{\pi}{2}-1;\frac{3\pi}{2}+1[$.

De plus :

Si f est une bijection de [a ;b] sur $[f(a);f(b)]$ et $f(a).f(b)<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet une et une seule solution dans [a ;b].

III. Calculs différentiels :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0 et x_0+h (avec h $\neq$ 0). **Si et seulement si lim(h→ 0) $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie ($\neq\infty$)** **alors f est dérivable en x_0 et la limite obtenue est $f'(x_0)$.**

Exemple : $f(x)=\sqrt{x}$

Avec $x_0=0$, on a lim(h→ 0^+) $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ = lim(h→ 0^+) $\frac{\sqrt{h}}{h}$ = lim(h→ 0^+) $\frac{1}{\sqrt{h}}$ = $+\infty$

La limite n'est pas finie, donc $f(x)=\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Exemple : $f(x)=$ x² si ≥1
x^3 si x ≤ 1

La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

h > 0 $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^2-1}{h}=2+h$ et lim(h→ 0^+) (2+h) = 2

h < 0 $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^3-1}{h}=3+3h^2+h^3$ et lim(h→ 0^-) $(3+3h^2+h^3)$ = 3

Ces deux valeurs n'étant pas égales, f n'est pas dérivable en 1.
En revanche, on dit que f est dérivable à droite en 1 et $f'_d(1) = 2$.
f est également dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = 3$.

Théorème :

Une fonction est dérivable en un point si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche de ce point et que ces deux dérivées sont égales.

On peut également dire que :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in$ I tel que x_0 ne soit pas une borne.
f est dérivable en x_0 s'il est possible d'écrire :
Pour tout h$\in$ R : $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$ avec lim(h→0) $\varepsilon(h) = 0$

Dérivées successives :

Si f est dérivable, on note f' sa fonction dérivée. Si f' est dérivable, on note f'' sa dérivée, appelée dérivée seconde de f.

$f^{(n)}$ (avec n $\in$ N*) est la dérivée d'ordre n de f.

Par exemple, on se sert parfois de f'' pour déterminer les variations et le signe de f', puis déterminer les variations et le signe de f.

Exemple : $f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1$ Déterminer les variations de f sur R.

$f'(x) = x - \sin x$
Pour déterminer le signe de f', on étudie f''.
$f''(x) = 1 - \cos x$ donc on a $f''(x) \geq 0$ sur R
f' est croissante sur R, et on a $f'(0) = 0 - \sin 0 = 0$

$f' \leq 0$ sur]-∞;0] donc f décroissante.
$f' \geq 0$ sur [0;+∞[donc f croissante.

Remarque : notation différentielle
La fonction f' peut également être notée $\frac{df}{dx}$.
De même $f^{(n)}$ est notée $\frac{d^n f}{dx^n}$ avec n $\in$ N*.
Cette notation est très utilisée en physique-chimie.

IV. Inégalité des accroissements finis :

1. Enoncé :

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I telle que m $\leq f' \leq$ M sur I (avec m et M$\in$ R).

Pour tout couple (a,b) $\in$ I² tel que a $\leq$ b, on a $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

Et si $|f'| \leq$ k sur I, alors pour tout couple (a,b) $\in$ I² on a : si $|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|$

Démonstration : Soit g une fonction de I sur R telle que $g(x) = f(x) - Mx$ avec f dérivable sur I et $\leq f' \leq$ M sur I (avec m et M$\in$ R).

g est dérivable sur I et : $g'(x) = f'(x) - M$
Or $f' \leq$ M, donc f' - M ≤ 0 sur I. Donc $g'(x) \leq 0$ sur I.
La fonction g est donc décroissante sur I.

Soit (a,b)$\in$ I² tel que a $\leq$ b, on a :

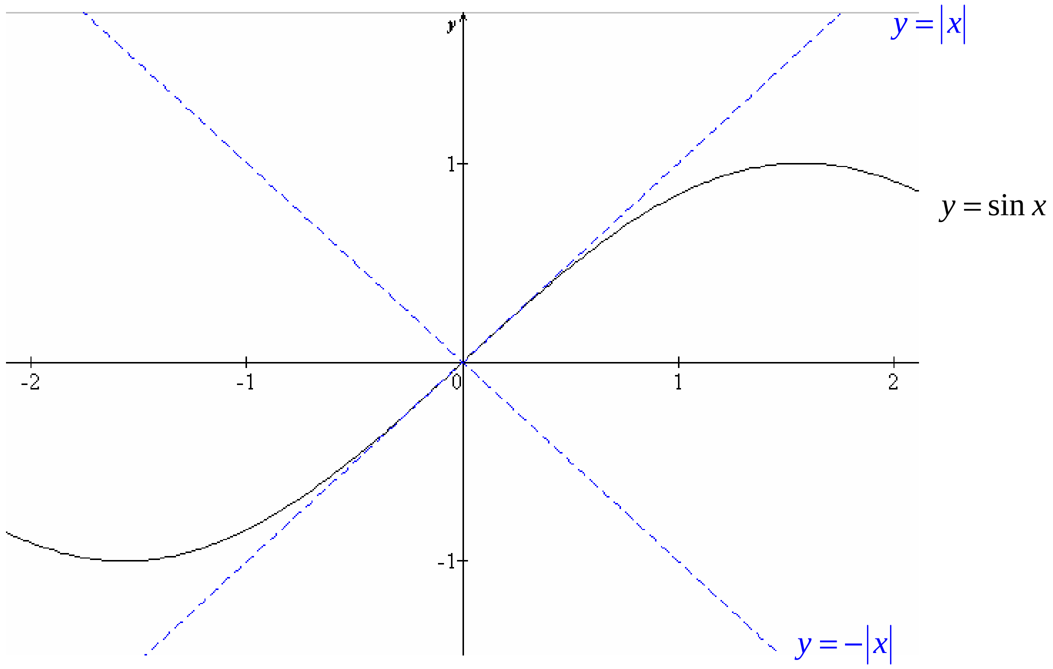
$$g(a) \geq g(b)$$
$$f(a) - M.a \geq f(b) - M.b$$
$$M.b - M.a \geq f(b) - f(a)$$
$$M(b-a) \geq f(b) - f(a)$$

On démontre de même que $m(b-a) \leq f(b) - f(a)$ avec une fonction $g(x) = f(x) - mx$.

Exemple :
$f(x) = \sin x$
f est dérivable sur R et $f'(x) = \cos x$
Pour tout x$\in$ R, -1 $\leq f'(x) \leq 1$ donc $|f'(x)| \leq 1$

D'après l'I.A.F. (Inégalité des Accroissements Finis), pour tout couple $(x, x_0)\in$ R², on a :
$|f(x) - f(x_0)| \leq | x - x_0|$
$|\sin x - \sin x_0| \leq | x - x_0|$

En choisissant $x_0 = 0$, on obtient : $|\sin x| \leq |x|$ pour tout $x \in$ R, soit $|-x| \leq |\sin x| \leq |x|$



2. Interprétation graphique :

On a pour tout couple $(x, x_0) \in$ I² tel que $x \geq x_0$:

$$m(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq M(x - x_0)$$

$$f(x_0) + m(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) + M(x - x_0)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

droite (d) droite (D)

Et pour tout couple $(x, x_0) \in$ I² tel que $x_0 \geq x$:

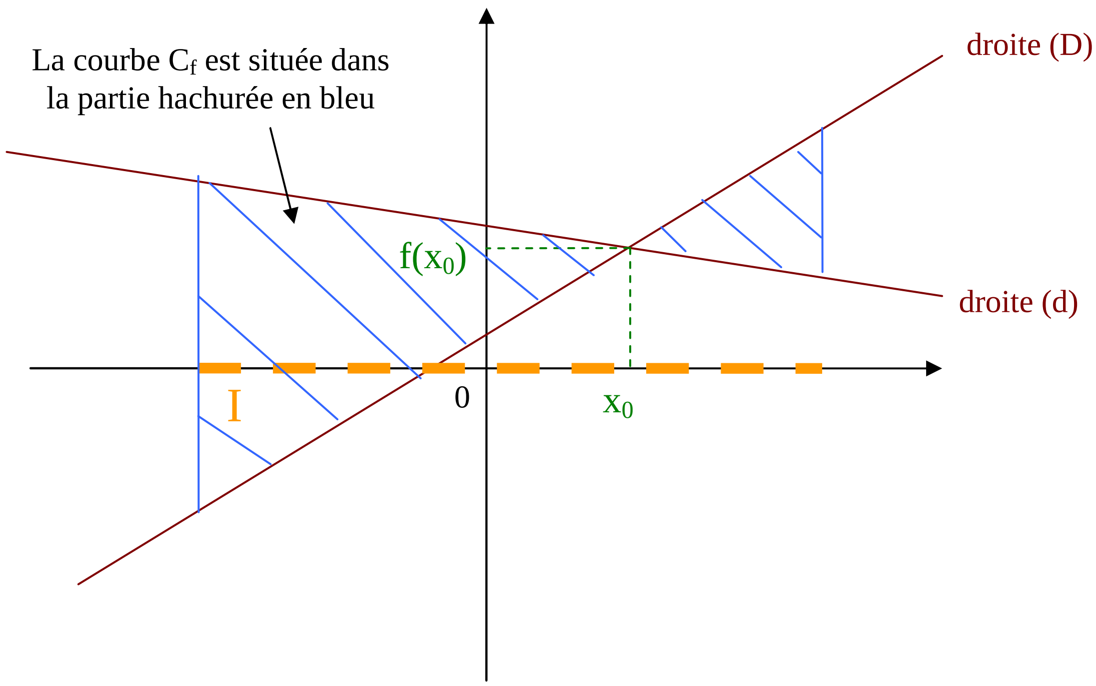
$$m(x_0 - x) \leq f(x_0) - f(x) \leq M(x_0 - x)$$

$$-f(x_0) + m(x - x_0) \leq -f(x) \leq -f(x_0) + M(x - x_0)$$

$$f(x_0) - M(x - x_0) \leq f(x) \leq f(x_0) - m(x - x_0)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

droite (D) droite (d)



V. Equation différentielle y'' + ω² y = 0 :

Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ revient à chercher les fonctions f dérivables deux fois sur R et telles que pour tout x de R, on ait : $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$

La démonstration étant compliquée, on admet que les fonctions cherchées sont les fonctions :

$$f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x \qquad \text{où } (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

On peut vérifier que les fonctions de ce type sont bien des solutions de l'équation :

$$f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$
$$f'(x) = -A\omega\sin\omega x + B\omega\cos\omega x$$
$$f''(x) = -A\omega^2\cos\omega x - B\omega^2\sin\omega x$$

On a bien $f''(x) + \omega^2 f(x) = -A\omega^2\cos\omega x - B\omega^2\sin\omega x + \omega^2(A\cos\omega x + B\sin\omega x) = 0$

A et B peuvent être déterminés par les conditions initiales.

Par exemple, si $f(0) = 0$ et $f''(0) = 1$
on a : $f(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = A$ donc $A = 0$

et $f''(0) = -A\omega^2\cos 0 - B\omega^2\sin 0 = -A\omega^2$ donc $-A\omega^2 = 1$ donc $A = -\dfrac{1}{\omega^2}$