Généralités sur les fonctions

I. Principales définitions

1. Un exemple pour commencer

$f(x) = x^2 - 4x$

Déterminer :

- l'ensemble de définition
- les images de 0, de 1 et de 100
- les antécédents de 0 et de -3

Solution :

- Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$ car $x^2 - 4x$ existe pour tout x réel.
- Image de 0 : $f(0) = 0^2 - 4\times 0 = 0$
- Image de 1 : $f(1) = 1^2 - 4\times 1 = -3$
- Image de 100 : $f(100) = 100^2 - 4\times 100 = 9600$
- Antécédents de 0 : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0$

  Les antécédents de 0 sont 0 et 4 (car $f(0) = 0$ et $f(4) = 0$)
- Antécédents de -3 : $f(x) = -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x = -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

  $x' = 1$ et $x'' = 3$

  Les antécédents de -3 sont 1 et 3 (car $f(1) = -3$ et $f(3) = -3$)

2. Ensemble de définition d'une fonction

Soit f une fonction.

- **Si x appartient à l'ensemble de définition D_f de f, alors x a une image unique.**
- **L'ensemble des réels x qui ont une image par f constitue l'ensemble de définition de la fonction f, généralement noté D_f.**

Exemple :

$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\mapsto f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$

$f(x)$ existe si $x-2\neq 0$ donc si $x\neq 2$.

$D_f=\mathbb{R}-\{2\}=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

Autre exemple :

$g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\mapsto g(x)=\sqrt{3-2x}$

$g(x)$ existe si $3-2x\geq 0$ (la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas) donc si $3\geq 2x$ donc si $\dfrac{3}{2}\geq x$.

$D_g=\mathbb{R}-\{2\}=\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$

3. Image et antécédent

➢ Image

Soit x est un élément de D_f, l'image de x par f est $y=f(x)$.

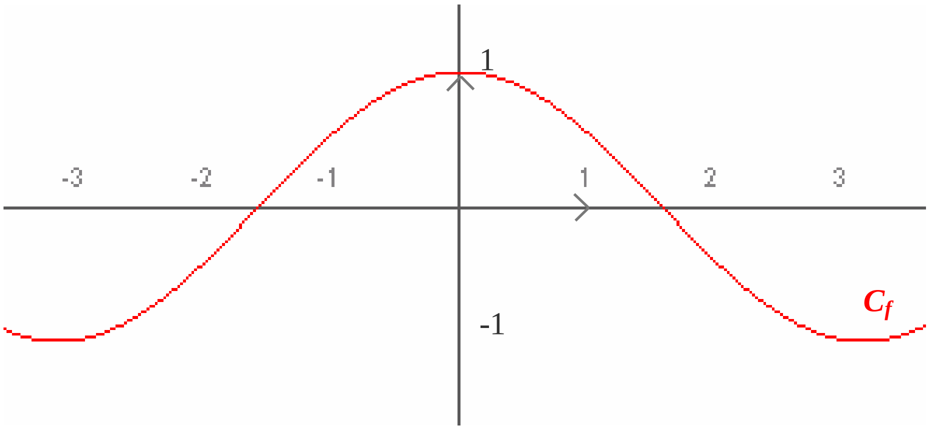
Par exemple, soit $f(x)=x^2-6$, l'image de 4 par f est $y=f(4)=4^2-6=10$.

➢ Antécédent

Les antécédents d'un réel y par une fonction f sont les valeurs x solutions de l'équation $y=f(x)$.

Par exemple, soit $f(x)=x^2-6$, quel(s) est(sont) le(s) antécédent(s) de 10 ?
Il faut résoudre $f(x)=10$ soit $x^2-6=10$.
L'équation équivaut à $x^2=16$ donc $x'=4$ et $x''=-4$.
Les antécédents de 10 par f sont 4 et -4.

4. Courbe représentative d'une fonction

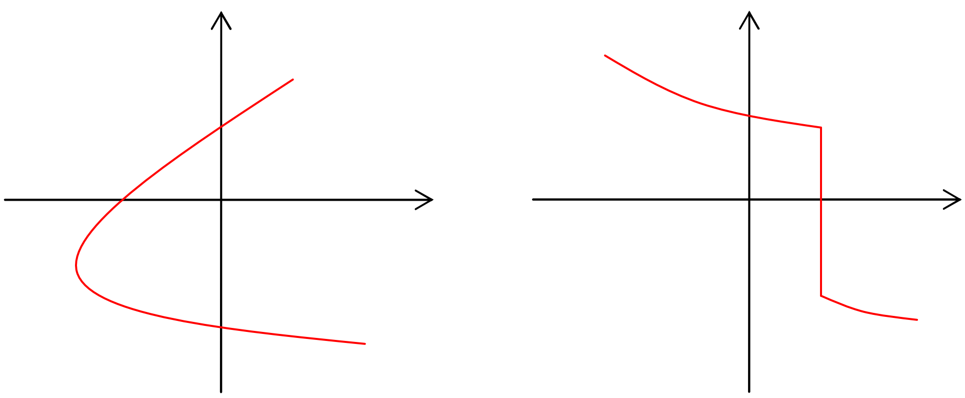


Courbe représentative de la fonction $f(x) = \cos x$

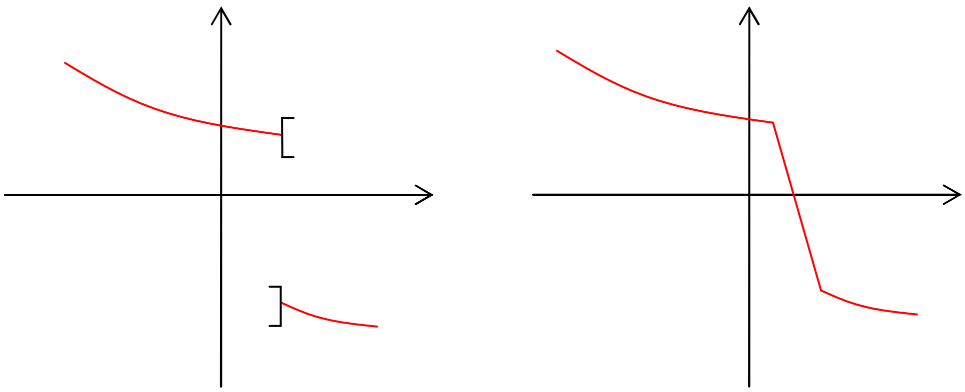
La courbe représentative C_f d'une fonction f dans le plan muni d'un repère est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x \in D_f$ et $y = f(x)$.

$$\boxed{M(x;y) \in C_f \text{ si } \begin{cases} x \in D_f \\ y = f(x) \end{cases}}$$

Remarque importante :
Pour toute valeur de x, il y a une seule valeur de $y = f(x)$. La courbe représentative C_f d'une fonction f ne peut donc pas avoir plusieurs points pour une même valeur d'une abscisse x.



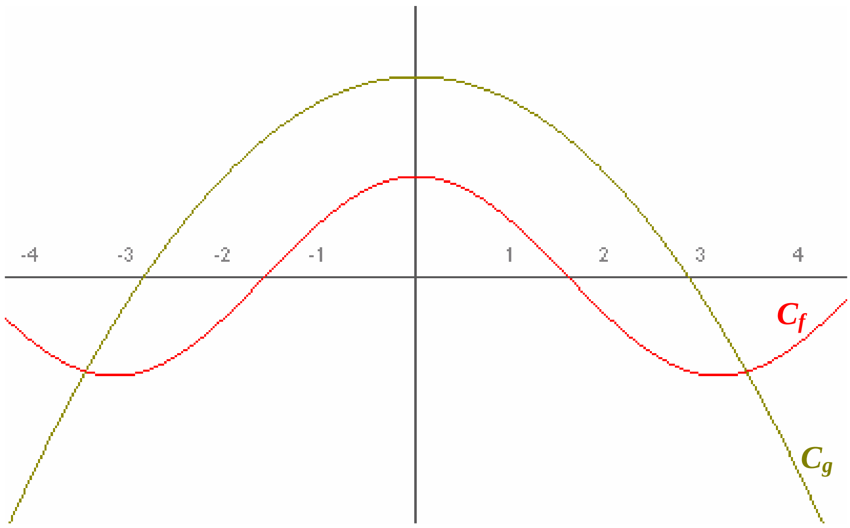
Ces courbes ne représentent pas des fonctions !



Ces courbes représentent des fonctions

5. Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations

➢ Intersection de courbes et équations



Soient C_f la courbe représentative de f et C_g la courbe représentative de g.

On peut établir les relations suivantes :

$$M \in C_f \Leftrightarrow y = f(x)$$

$$M \in C_g \Leftrightarrow y = g(x)$$

Aux points d'intersection de C_f et de C_g, on a $M \in C_f$ et $M \in C_g$ donc $y = f(x)$ et $y = g(x)$ soit $f(x) = g(x)$.

Les abscisses x des points d'intersection de C_f et de C_g vérifient $f(x) = g(x)$.

A retenir :

Et inversement, les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de C_f et de C_g.

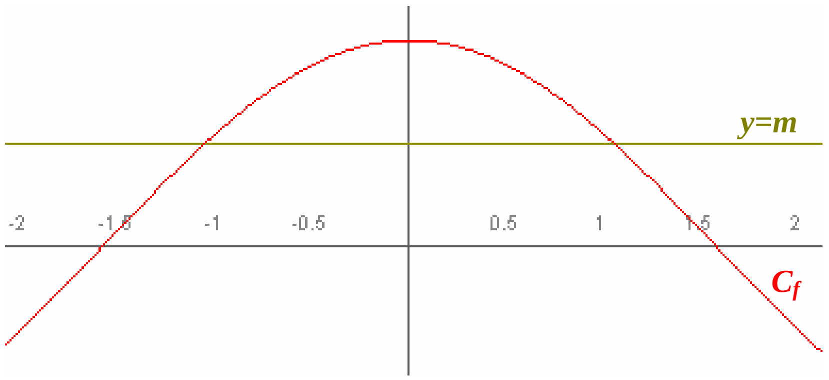
- **Position relative de deux courbes et intersection**

Les abscisses des points de la courbe C_f situées au-dessus de C_g vérifient $f(x) > g(x)$.

A retenir :

Et inversement, les solutions de $f(x) > g(x)$ sont les abscisses des points de C_f situées au-dessus de C_g.

- **Un cas particulier : équation $f(x) = m$ et inéquation $f(x) > m$**

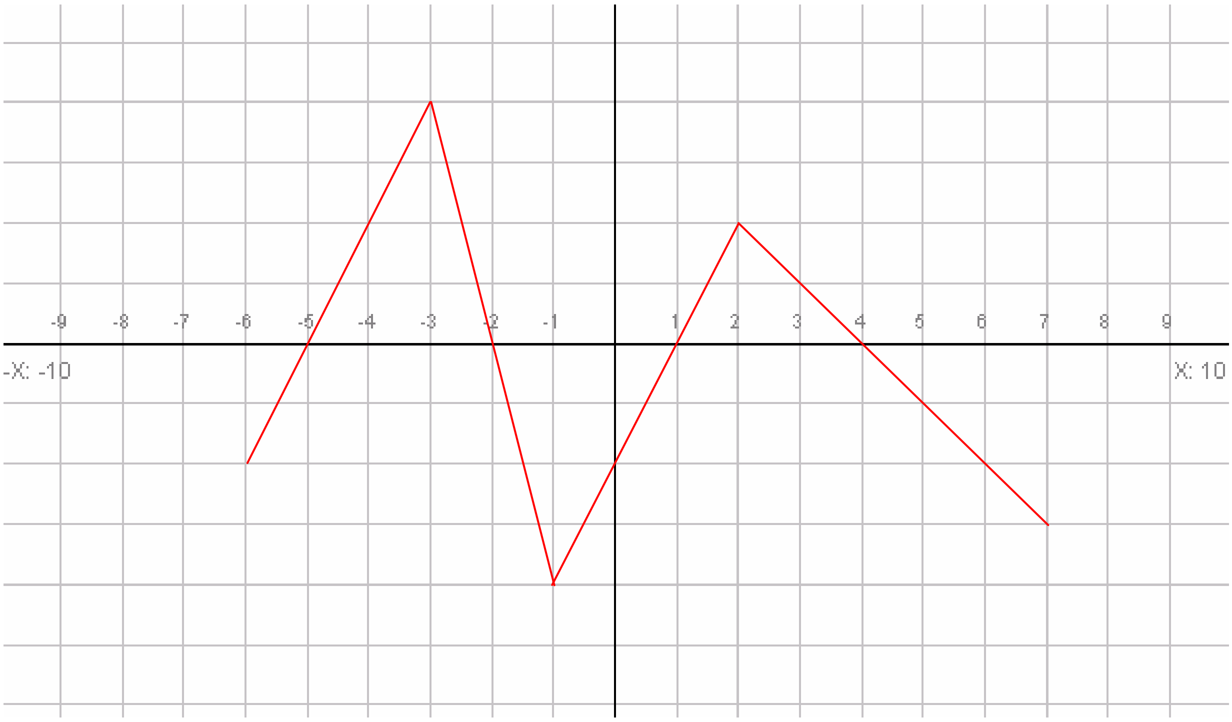


Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de C_f avec la droite d'équation $y = m$.

Les solutions de l'équation $f(x) > m$ sont les abscisses des points de C_f situés au-dessus de la droite d'équation $y = m$.

6. Quelques exercices d'application

La courbe ci-dessous représente la fonction f définie sur $[-6;7]$



Questions :

Répondre par lecture graphique :

1- Quelles sont les images des réels -5, -3, 0 et 6 ?
2- Quels sont les antécédents de -1 et 0 ?
3- Résoudre graphiquement $f(x)=0$
4- Quel est, en fonction de m, le nombre de solutions de $f(x)=m$
5- Résoudre graphiquement $f(x)<0$
6- Résoudre graphiquement $f(x)\geq 2$

Réponses :

1- Image de -5 : 0 (ordonnée du point d'abscisse -5)
   Image de -3 : 4

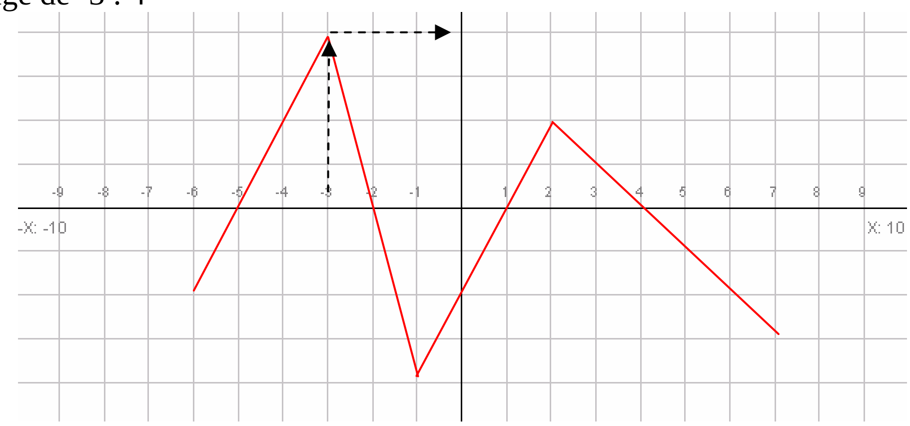
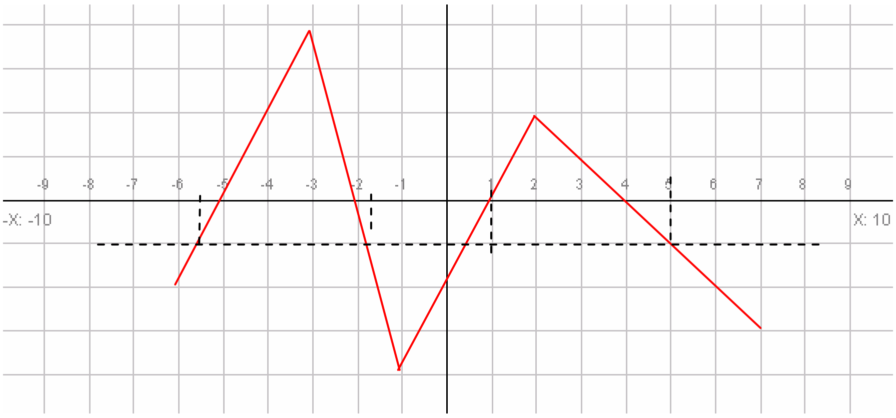


Image de 0 : -2
Image de 6 : -2

2- Antécédents de -1 : -5,5 -1,75 0,5 et 5



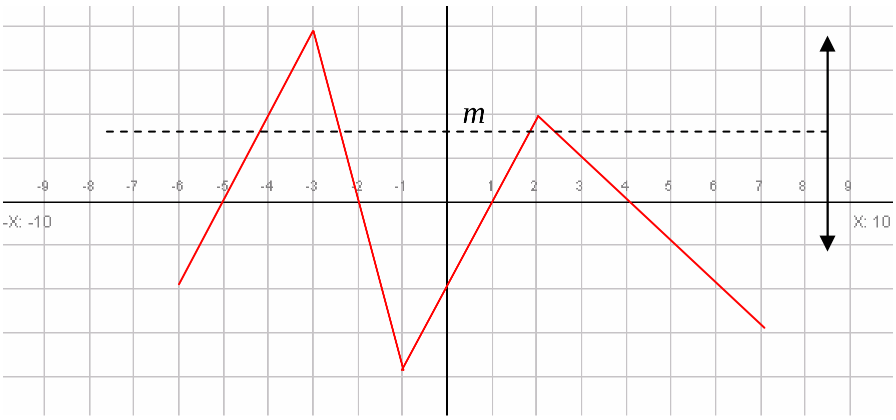
Antécédents de 0 : -5 -2 1 et 4

3- $f(x)=0$

La solution est l'ensemble des antécédents de 0 : $S=\{-5;-2;1;4\}$

4- Nombre de solutions de $f(x)=m$

C'est le nombre de points d'intersection de courbe avec une la droite parallèle à l'axes des abscisses et d'ordonnées *m*.



Si $m<-4$:	pas de solution
Si $m=-4$:	une solution
Si $-4<m<-3$:	deux solutions
Si $-3\leq m<-2$:	trois solutions
Si $-2\leq m<2$:	quatre solutions
Si $m=2$:	trois solutions
Si $2<m<4$:	deux solutions
Si $m=4$:	une solution
Si $m>4$:	pas de solution

5- $f(x) < 0$

Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessous de l'axe des abscisses.

$S = [-6;-5[\cup]-2;1[\cup]4;7]$

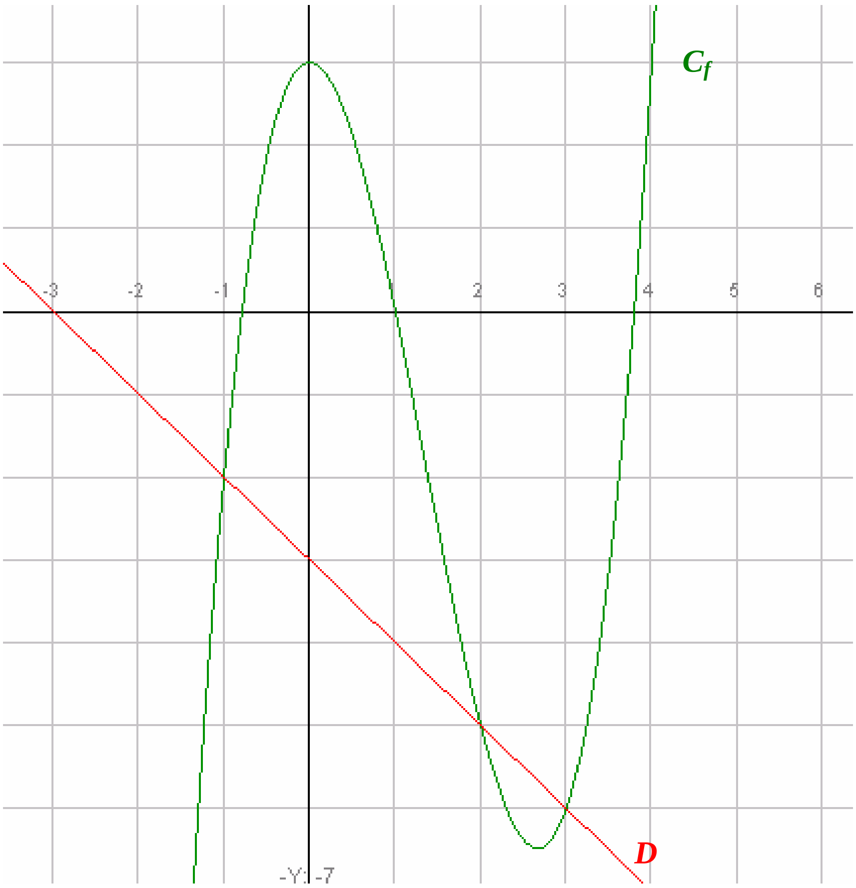
6- $f(x) > 2$

Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessus de la droite d'équation $y = 2$.

$S = [-4;-2,5] \cup \{2\}$

Autre exercice :

Soit la courbe C_f représentative de f telle que $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ et la droite D d'équation $y = -x - 3$.



1- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$ puis l'inéquation $f(x) < 3$.

2- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ puis l'inéquation $f(x) \geq 0$. On donnera un encadrement d'amplitude 5×10^{-1} des solutions non entières.

3- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -x - 3$ puis l'inéquation $f(x) \leq -x - 3$

Réponses :

1- $f(x)=3$

La solution est l'ensemble des antécédents de 3 : $S=\{0;4\}$

$f(x)<3$: $S=]-\infty;0[\cup]0;4[$

2- $f(x)=0$

La solution est l'ensemble des antécédents de 0 : $S=\{a;1;b\}$

Avec $-1<a<-0,5$ et $3,5<a<4$

$f(x)\geq 0$: $S=[a;1]\cup[b;+\infty[$

3- $f(x)=-x-3$

La solution l'ensemble des abscisses des points d'intersection de C_f et de D :

$S=\{-1;2;3\}$.

$f(x)\leq -x-3$: $S=]-\infty;-1]\cup[2;3]$

II. Propriétés particulières : fonctions paires, impaires

1. Fonctions paires

Définition

Important :

Soit f une fonction définie sur D_f.

La fonction f est paire si :

$$\begin{cases}\text{si } x\in D_f \text{ alors } -x\in D_f \\ \text{pour tout } x\in D_f \text{ on a } f(-x)=f(x)\end{cases}$$

Exemples

Déterminer si les fonctions suivantes sont paires :

- $f(x)=x^2$ donc $D_f=\mathbb{R}$

  On calcule $f(-x)$:

  $f(-x)=(-x)^2=x^2$

Donc $f(x) = f(-x)$
La fonction f est paire.

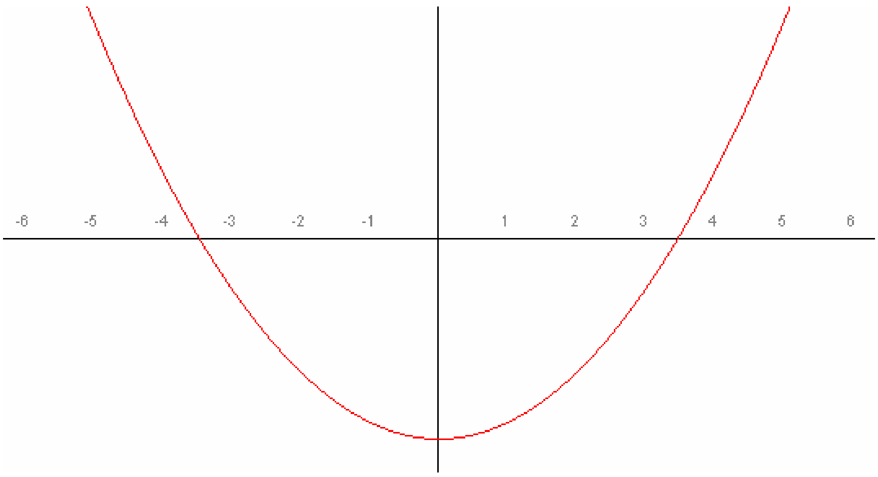
- $f(x) = 2x^2 + 3$ donc $D_f = \mathbb{R}$
  $f(-x) = 2(-x)^2 + 3 = 2x^2 + 3 = f(x)$
  La fonction f est paire.

- $f(x) = 2x^2 + 3x$ donc $D_f = \mathbb{R}$
  $f(-x) = 2(-x)^2 + 3(-x) = 2x^2 - 3x \neq f(x)$
  $f(-x) \neq f(x)$
  La fonction f n'est pas paire.

- $f(x) = \sqrt{x}$ donc $D_f = [0;+\infty[$
  Pour tout x de D_f, $-x$ n'appartient pas à D_f. Donc la fonction f n'est pas paire.

Propriété de la courbe représentative d'une fonction paire (repère orthogonal)

En repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées :



Courbe représentative de la fonction paire : $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - 3$

2. Fonctions impaires

➢ Définition

Important :

Soit f une fonction définie sur D_f.

La fonction f est impaire si :

$$\begin{cases} \text{si } x \in D_f \text{ alors } -x \in D_f \\ \text{pour tout } x \in D_f \text{ on a } f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

➢ Exemples

Déterminer si les fonctions suivantes sont impaires :

- $f(x) = x$ donc $D_f = \mathbb{R}$
  On calcule $f(-x)$:
  $f(-x) = -x$
  Donc $f(-x) = -f(x)$
  La fonction f est impaire.

- $f(x) = 2x$ donc $D_f = \mathbb{R}$
  $f(-x) = -2x = -f(x)$
  La fonction f est impaire.

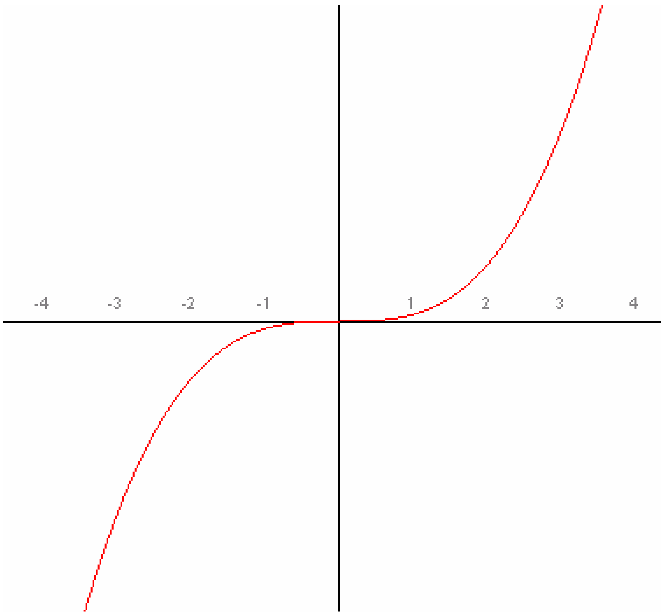
- $f(x) = 2x + 2$ donc $D_f = \mathbb{R}$
  $f(-x) = -2x + 2$
  $f(-x) \neq -f(x)$
  La fonction f n'est pas impaire (elle n'est pas paire non plus : $f(-x) \neq f(x)$).

- $f(x) = x^3$ donc $D_f = \mathbb{R}$
  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$
  La fonction f est impaire.

- $f(x) = \frac{1}{x}$ donc $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$
  $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$
  La fonction f est impaire.

Propriété de la courbe représentative d'une fonction impaire (repère orthogonal)

En repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère :



Courbe représentative de la fonction impaire : $f(x) = \dfrac{x^3}{10}$

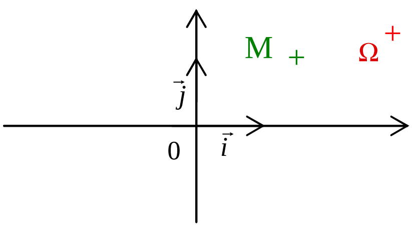
Remarque : Si une fonction impaire est définie pour $x = 0$, alors on a forcément $f(0) = 0$.

3. Mise en évidence d'un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées ou d'un centre de symétrie

Pour cela, il faut se servir des propriétés des fonctions paires et impaires, en effectuant éventuellement un changement de repère.

Principe du changement de repère

Repère de départ : *R*
$R(0, \vec{i}, \vec{j})$. Soit le point *M* de coordonnées (x, y) dans le repère *R*.
Soit le point $\Omega(x_0, y_0)$ qui sera l'origine de notre nouveau repère.



On va maintenant définir un nouveau repère *R'* d'origine $\Omega(x_0, y_0)$: $R'(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$
Les nouvelles coordonnées du point *M* dans ce repère *R'* sont : (X, Y).

On a la relation suivante : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$
De laquelle on déduit la **formule de changement de repère** :

$$\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$$

Exemple pour mieux comprendre :

- Soit $\Omega(3,2)$ dans un repère $R(0, \vec{i}, \vec{j})$.
  M a pour coordonnées *(1,2)* dans ce repère $R(0, \vec{i}, \vec{j})$.
  Calculer les coordonnées de $M(X, Y)$ dans le nouveau repère $R'(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

  On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$, donc :
  $$\begin{cases} 1 = 3 + X \\ 2 = 2 + Y \end{cases}$$
  On déduit de cette relation que :
  $X = -2$ et $Y = 0$

  Donc on a $M(-2, 0)$ dans le nouveau repère *R'*.

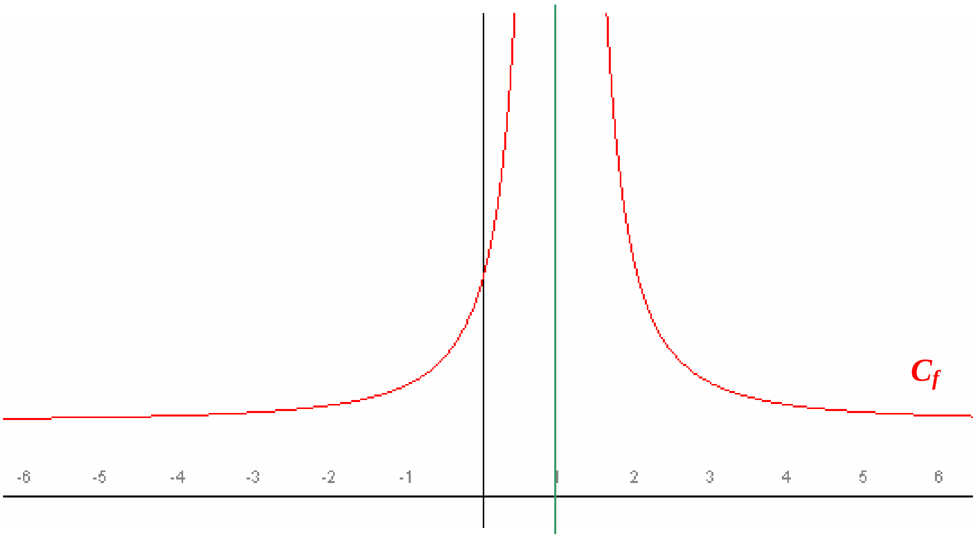
- Soit Δ la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 2$ dans le repère $R(0, \vec{i}, \vec{j})$.
  Calculer les coordonnées de Δ dans le nouveau repère $R'(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.
  Soit $M(x, y) \in \Delta$.
  Les coordonnées du point *M* vérifient donc l'équation de Δ.
  On a : $y = \frac{1}{2}x - 2$.
  Or on sait que $\begin{cases} x = 3 + X \\ y = 2 + Y \end{cases}$ (cf. plus haut)
  On en déduit que $2 + Y = \frac{1}{2}(3 + X) - 2$ donc $Y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}X - 4$ soit $Y = \frac{1}{2}X - \frac{5}{2}$.

  L'équation de la droite Δ dans le repère $R'(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ est $Y = \frac{1}{2}X - \frac{5}{2}$.

➢ Mise en évidence d'un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées :

Etudions un exemple :

Soit la fonction f telle que $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$ et soit C_f sa courbe représentative.



On a $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

Démontrer que la droite Δ d'équation $x=1$ est axe de symétrie de C_f.
Pour cela, on fait un changement de repère en prenant pour nouvelle origine $\Omega(1,0)$ pour que que Δ corresponde à l'axe des ordonnées dans ce nouveau repère.
Cherchons les formules de changement de repère :

Soit $M(x,y)$ dans $(0,\vec{i},\vec{j})$
Soit $M(X,Y)$ dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

On a $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}$, donc :

$$\begin{cases} x=1+X \\ y=0+Y \end{cases}$$

Equation de la courbe dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$: $Y=\dfrac{(1+X)^2-2(1+X)+3}{((1+X)-1)^2}=\dfrac{X^2+2}{X^2}=1+\dfrac{2}{X^2}$

Posons la fonction g telle que $g(X)=1+\dfrac{2}{X^2}$

On a $g(-X)=1+\dfrac{2}{(-X)^2}=1+\dfrac{2}{X^2}=g(X)$ donc la fonction g est paire. Δ, axe des ordonnées dans $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, est axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction g donc axe de symétrie de C_f.

Méthode pour mettre en évidence un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées :

- Faire un changement de repère en prenant la nouvelle origine Ω sur Δ.
- Déterminer les formules de changement de repère.
- Déterminer l'équation de la courbe dans le nouveau repère et la mettre sous la forme $Y=g(X)$.
- Démontrer que la fonction g est paire.
- Conclure que Δ est axe de symétrie de la courbe C_f.

- **Mise en évidence d'un centre de symétrie :**

Méthode pour mettre en évidence un centre de symétrie :

- Faire un changement de repère en prenant la nouvelle origine Ω, centre de symétrie supposée de C_f, courbe représentative de *f* dans $(0,\vec{i},\vec{j})$.
- Déterminer les formules de changement de repère.
- Déterminer l'équation de la courbe dans le nouveau repère et la mettre sous la forme $Y=g(X)$.
- Démontrer que la fonction g est **im**paire.
- Conclure que Ω est centre de symétrie de la courbe C_f.

III. Monotonie et extremum

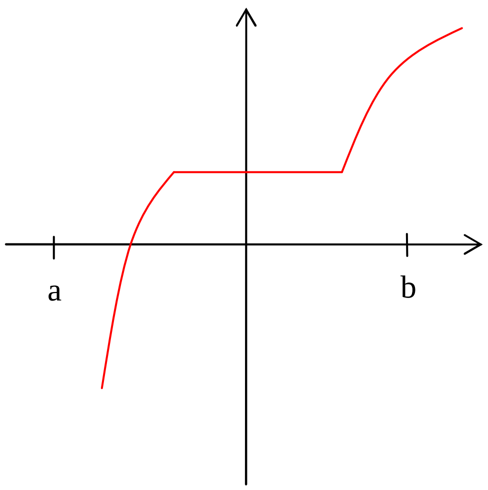
Ce chapitre III reprend en partie des notions abordées en classe de seconde.

1. Sens de variation d'une fonction

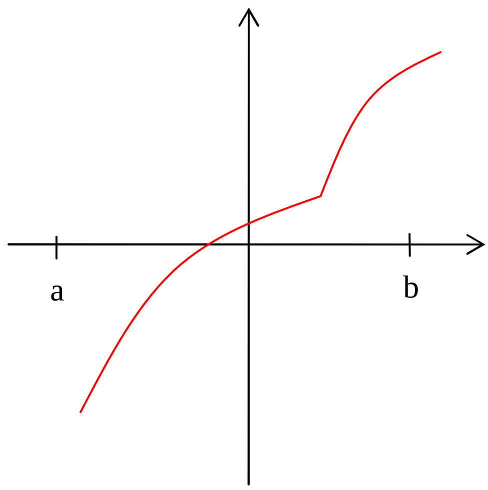
Soit *f* une fonction définie sur l'intervalle I.
Dire *f* que est croissante sur I signifie que pour tout x_1 et x_2 de I, on a :
Si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$
Une fonction croissante « conserve l'ordre ».

Soit *f* une fonction définie sur l'intervalle I.
Dire *f* que est décroissante sur I signifie que pour tout x_1 et x_2 de I, on a :
Si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$
Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».

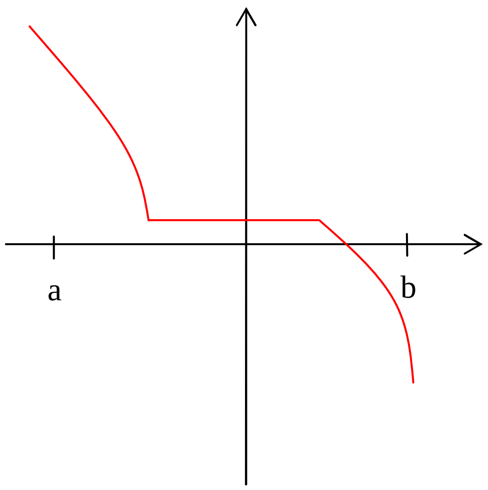
Illustration graphique :



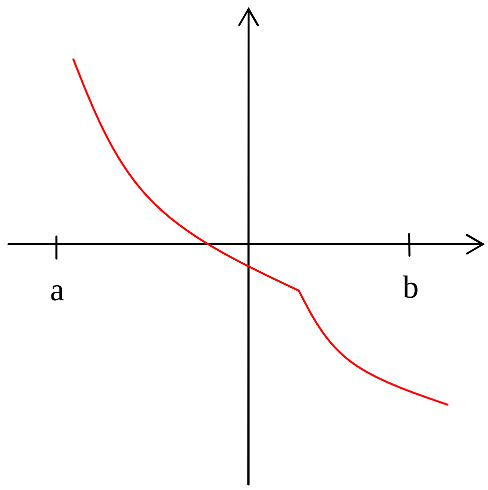
Fonction croissante sur $[a,b]$, mais non strictement croissante



Fonction strictement croissante sur $[a,b]$



Fonction décroissante sur $[a,b]$, mais non strictement croissante



Fonction strictement décroissante sur $[a,b]$

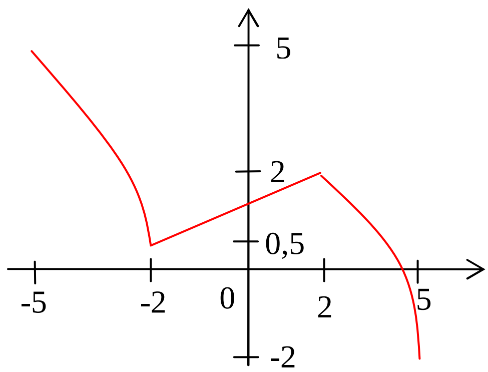
2. Fonction monotone sur un intervalle

Une fonction définie sur un intervalle I est **monotone** sur cet intervalle si elle est : - soit croissante sur I, - soit décroissante sur I, - soit constante sur I.

3. Tableau de variation

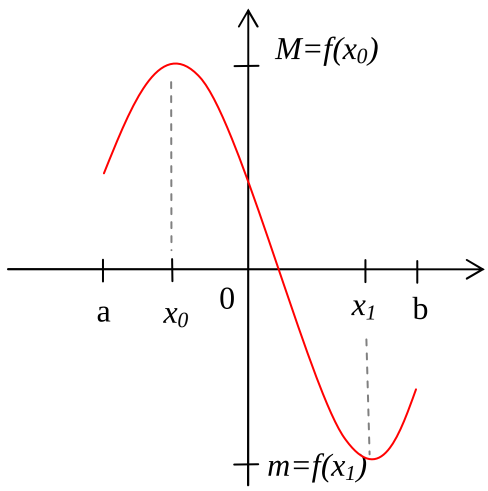
Un tableau de variation d’une fonction rapporte l’ensemble des informations sur le sens de variation de cette fonction suivant les valeurs de *x*.

Exemple :



x	-5	-2	2	5
$f(x)$	5 ↘	0,5 ↗	2 ↘	-2

4. Maximum et minimum d'une fonction sur un intervalle



Soit *f* une fonction définie sur $I=[a,b]$

- Dire que $f(x_0)$ est le **maximum** de *f* sur *I* signifie que :
  - $x_0 \in I$
  - pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leq f(x_0)$
- Dire que $f(x_1)$ est le **minimum** de *f* sur *I* signifie que :
  - $x_0 \in I$
  - pour tout $x \in I$, on a $f(x) \geq f(x_0)$

IV. Composé de deux fonctions – opérations sur les fonctions

1. Composé de deux fonctions

- **Exemple d'introduction :**

Soient les deux fonctions *u* et *v* telles que :

$$u(x) = -2x+1 \quad \text{et} \quad v(x) = x^2$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "u"'] \arrow[rr, bend right, "v \circ u"'] & -2x+1 \arrow[r, mapsto, "v"'] & (-2x+1)^2 \end{tikzcd}$$

$v \circ u$ est la composée des fonctions v et u.

On applique d'abord u puis v (sens inverse de l'écriture de $v \circ u$)

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "v"'] \arrow[rr, bend right, "u \circ v"'] & x^2 \arrow[r, mapsto, "u"'] & -2x^2+1 \end{tikzcd}$$

Les fonctions $v \circ u$ et $u \circ v$ ne sont pas les mêmes !!

➢ Définition d'une fonction composée :

Soient u la fonction définie sur l'ensemble D_u et v la fonction définie sur l'ensemble D_v.

Pour tout x de D_u tel que $u(x) \in D_v$, on définit la fonction $v \circ u$ ainsi :

$$(v \circ u)(x) = v[u(x)]$$

Les fonctions $v \circ u$ et $u \circ v$ ne sont pas les mêmes, pour la fonction $v \circ u$, on applique d'abord u à x puis v à $u(x)$.

Condition sur x pour lesquelles on peut calculer $v[u(x)]$ ***:***

Déjà, il faut que $x \in D_u$ (pour que $u(x)$ soit calculable)

Ensuite, il faut que les valeurs $u(x)$ (obtenues pour $x \in D_u$) soient dans l'ensemble D_v pour que $v[u(x)]$ soit calculable.

Donc $v \circ u$ est définie pour les valeurs de x telles que : $x \in D_u$ et $u(x) \in D_v$.

➢ Quelques exemples :

Déterminer les fonctions $v \circ u$ et $u \circ v$ dans les cas suivants :

- $u(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$

  $v(x) = 3 - x$

$D_v = \mathbb{R}$ donc $u(x) \in D_v$ et inversement.

$(v \circ u)(x) = v[u(x)] = v\left[x^2 + \frac{1}{2}x\right]$

$(v \circ u)(x) = 3 - \left(x^2 + \frac{1}{2} x \right)$

$(v \circ u)(x) = -x^2 - \frac{1}{2} x + 3$

et :

$(u \circ v)(x) = u\left[v(x)\right] = u(3-x) = (3-x)^2 + \frac{1}{2}(3-x)$

$(u \circ v)(x) = 9 - 6x + x^2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} x$

$(u \circ v)(x) = x^2 - \frac{13}{2} x + \frac{21}{2}$

- $u(x) = -x + 3x^3$
  $v(x) = 1 - 2x$

$D_v = \mathbb{R}$ donc $u(x) \in D_v$ et inversement.

$(v \circ u)(x) = v\left[u(x)\right] = v\left[-x + 3x^3\right]$

$(v \circ u)(x) = v\left[u(x)\right] = 1 - 2(-x + 3x^3) = 1 + 2x - 6x^3$

et :

$(u \circ v)(x) = u\left[v(x)\right] = u(1-2x) = -(1-2x) + 3(1-2x)^3$

$= -1 + 2x + 3(1 - 4x + 4x^2)(1-2x) = -1 + 2x + 3(1 - 4x + 4x^2 - 2x + 8x^2 - 8x^3)$

$= -1 + 2x + 3(-8x^3 + 12x^2 - 6x + 1) = -1 + 2x - 24x^3 + 36x^2 - 18x + 3$

$= -24x^3 + 36x^2 - 16x + 2$

2. Sens de variation d'une fonction composée

Théorème :

Soit *u* et *v* deux fonctions définies et **strictement monotone** respectivement sur I et J tels que $v(J) \subset I$ (c'est-à-dire que les valeurs *v(x)* pour tout $x \in D_v$, soient inclues dans D_u pour que $u\left[v(x)\right]$ existe).

Si *u* et *v* sont de même monotonie, alors $u \circ v$ est croissante sur *J*,
sinon elle est décroissante sur *J*.

$v(J)$ est l'image de l'ensemble J par la fonction *v*. $v(J) \subset I$ veut dire que l'ensemble $v(J)$ est contenue dans l'ensemble I (par exemple : $\left[5; +\infty\right[\subset \mathbb{R}+$).

Il faut bien vérifier que toutes les conditions sont réunies avant d'appliquer ce théorème ! Et c'est là toute la difficulté du théorème comme le montre l'exemple suivant.

Exemple :

Soient *u* et *v* deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$u(x) = 3x + 1$
$v(x) = x^2 - 2$

a) Déterminer les fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$ et leurs ensembles de définition.
b) Dresser le tableau de variations de $u \circ v$ et $v \circ u$.

Solution :

a) Il faut tout d'abord préciser les ensembles de définition des définitions:
On a $D_u = D_v = \mathbb{R}$, donc $u \circ v$ et $v \circ u$ existent pour tout x de $\mathbb{R}$: $D_{u \circ v} = D_{v \circ u} = \mathbb{R}$

Déterminons $u \circ v$:
$(u \circ v)(x) = u[v(x)]$
$(u \circ v)(x) = u[x^2 - 2] = 3(x^2 - 2) + 1 = 3x^2 - 6 + 1$
$(u \circ v)(x) = 3x^2 - 5$

Déterminons $v \circ u$:
$(v \circ u)(x) = v[u(x)]$
$(v \circ u)(x) = v[3x + 1] = (3x + 1)^2 - 2 = 9x^2 + 6x + 1 - 2$
$(v \circ u)(x) = 9x^2 + 6x - 1$

b) Déterminons les variations des deux fonctions composées :

Variations de $u \circ v$:

Soient les deux intervalles $I = \mathbb{R}$ et $J_1 = \mathbb{R}+$. *u* est définie et strictement monotone sur *I* (croissante) et *v* est définie et strictement monotone sur J_1 (croissante car fonction carrée).
De plus $v(J_1) = \mathbb{R}+$ ($v(J_1)$ est l'image de l'intervalle J_1 par *v*) donc $v(J_1) \subset I$.
On est bien dans les conditions du théorème sur le sens de variation des fonctions composées.

D'après ce théorème, $u \circ v$ est croissante sur $J_1 = \mathbb{R}+$ (*u* et *v* sont de même monotonie).
On démontrerait de même que $u \circ v$ est décroissante sur $\mathbb{R}-$ (*u* et *v* sont alors de monotonie différente).

Variations de $v \circ u$:

Ici, il faut prendre le théorème « à l'envers » puisque l'on cherche le sens de variation de $v \circ u$ et non de $u \circ v$!!

Soient les deux intervalles $I = \mathbb{R}+$ et $J_1 = \left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$. v est définie et strictement monotone sur I (croissante car fonction carrée) et v est définie et strictement monotone sur J_1.
De plus $u(J_1) = \mathbb{R}+$ (La fonction u s'annule en $-\frac{1}{3}$ et est croissante) donc $u(J_1) \subset I$.
On est bien dans les conditions du théorème sur le sens de variation des fonctions composées.

D'après ce théorème, $v \circ u$ est croissante sur $J_1 = \left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$ (u et v sont de même monotonie).
On démontrerait de même que $v \circ u$ est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]$ (u et v sont alors de monotonie différente).

Récapitulons les résultats dans un tableau :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
u		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	
v		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
$u \circ v$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
$v \circ u$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Il existe une autre façon de trouver ces variations, sans avoir recours au théorème :
Exemple pour $v \circ u$:

Rappel : pour tout x, $(v \circ u)(x) = v[u(x)]$.

Soient $x_1 \in \left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$ et $x_2 \in \left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$ tels que $x_1 > x_2$.

On a : $u(x_1) > u(x_2) \geq 0$ (car u fonction strictement croissante et positive sur $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$),

donc $v[u(x_1)] > v[u(x_2)]$ car la fonction v est strictement croissante sur $\mathbb{R}+$.

En récapitulant :

si $x_1 \in \left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$ et $x_2 \in \left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$ tels que $x_1 > x_2$, alors $(v \circ u)(x_1) > (v \circ u)(x_2)$

La fonction $v \circ u$ est donc croissante sur $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right[$. On démontrerait de même que $v \circ u$ est décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right]$

3. Opérations sur les fonctions

➢ Somme de deux fonctions :

$$f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

Exemple :

$f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = 2x+3$

$(f+g)(x) = \frac{1}{x} + 2x + 3$

$(f+g)(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x^2}{x} + \frac{3x}{x} = \frac{2x^2+3x+1}{x}$

➢ Produit d'une fonction par un nombre :

Soit k un réel. La fonction kf est définie par :

$$(kf)(x) = k.(f)(x)$$

Exemple :

$f(x) = 3x+1$

$(4f)(x) = 4 \times f(x) = 12x+4$

Produit de deux fonctions :

Le produit de deux fonctions *f* et *g* est noté *fg* et est défini par :

$$f(x)\times g(x)=(fg)(x)$$

Exemple :

$$(fg)(x)=\left(\frac{1}{x}\right)(2x+3)$$

$$(fg)(x)=\frac{2x+3}{x}=2+\frac{3}{x}$$

Quotient de deux fonctions :

Le quotient de la fonction *f* par la fonction *g* est noté $\frac{f}{g}$ et est défini par :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

Exemple :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{2x+3}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1}{x}\times\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{2x^2+3x}$$

V. Majorant, minorant et comparaison de fonctions

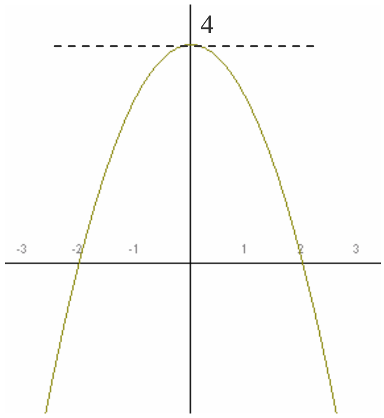
1. Fonction majorée, minorée, bornée

Fonction majorée sur un intervalle *I* :

Dire que la fonction *f* est majorée par le réel *M* sur l'intervalle *I* signifie que :

quelque soit *x* de *I*, on a : $f(x)\leq M$

Exemple :
Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$.
Quelque soit *x* de $\mathbb{R}$, on a : $x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \leq 0 \Rightarrow -x^2 + 4 \leq 4$
Donc quelque soit *x* de $\mathbb{R}$, on a : $f(x) \leq 4$
La fonction *f* est majorée par 4 sur $\mathbb{R}$ (et par tous les réels >4).



Représentation graphique de $f(x) = -x^2 + 4$

➢ Fonction minorée sur un intervalle *I* :

Dire que la fonction *f* est minorée par le réel *m* sur l'intervalle *I* signifie que :

quelque soit *x* de *I*, on a : $f(x) \geq m$

Exemple :
Soit la fonction *f* définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 2x + 1$.
Quelque soit $x \in [0;+\infty[$, on a : $x \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 0 \Rightarrow 2x + 1 \geq 1$
Donc quelque soit $x \in [0;+\infty[$, on a : $f(x) \geq 1$
La fonction *f* est minorée par 1 sur $[0;+\infty[$ (et par tous les réels <1).

➢ Fonction bornée sur un intervalle *I* :

Dire que la fonction *f* est bornée sur l'intervalle *I* signifie qu'elle est à la fois majorée et minorée sur cet intervalle, donc qu'il existe des réels *m* et *M* tels que :

quelque soit *x* de *I*, on a : $m \leq f(x) \leq M$

Exemple :
La fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ car quelque soit *x* de $\mathbb{R}$, on a : $1 \leq \sin(x) \leq 1$.

2. Exercice d'application

➢ Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5}{x^2+1} - 2$.
Démontrer que la fonction *f* est bornée par -2 et 3 sur $\mathbb{R}$.

Démonstration :

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\dfrac{5}{x^2+1} > 0 \Rightarrow \dfrac{5}{x^2+1} - 2 > -2$

La fonction f est minorée par -2 sur $\mathbb{R}$.

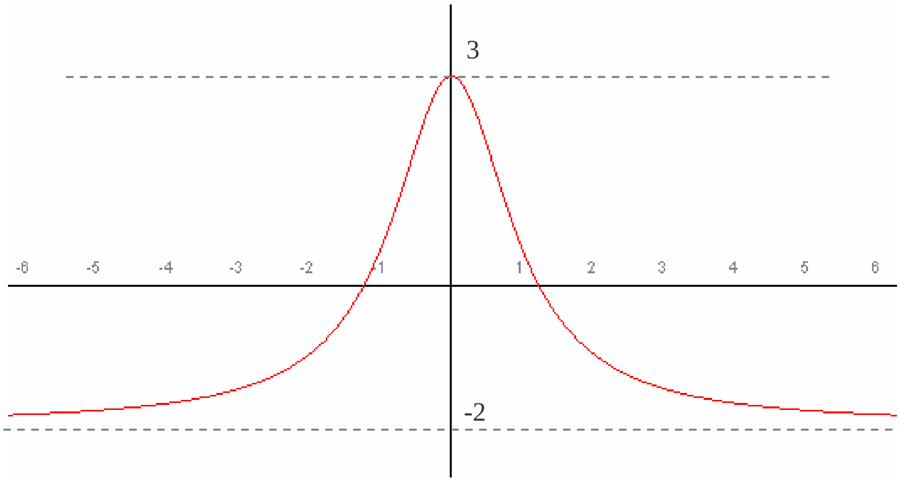
Il faut maintenant démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) \leq 3$.
Une méthode courante consiste à démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) - 3 \leq 0$.

$$f(x) - 3 = \frac{5}{x^2+1} - 2 - 3 = \frac{5}{x^2+1} - \frac{5(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{-5x^2}{x^2+1}$$

Quelque soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $5x^2 \geq 0 \Rightarrow -5x^2 \leq 0 \Rightarrow \dfrac{-5x^2}{x^2+1} \leq 0 \Rightarrow f(x) - 3 \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 3$

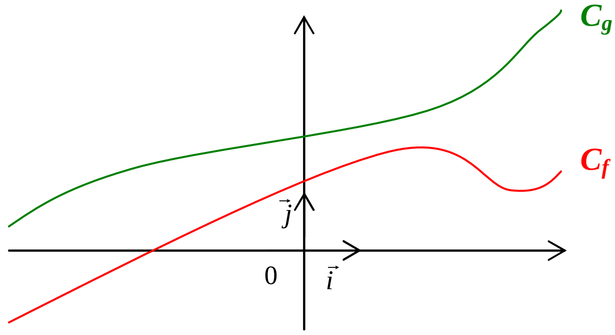
La fonction f est majorée par 3 sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est donc bornée par -2 et 3 sur $\mathbb{R}$.



Représentation graphique de $f(x) = \dfrac{5}{x^2+1} - 2$

3. Comparaison de fonctions



Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. Dire que $f \leq g$ signifie que pour tout $x \in I$, on a $f(x) \leq g(x)$.

Graphiquement, cela signifie que la courbe C_f est en dessous de la courbe C_g.

Exemple :
Soit les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2$
$g(x) = x$

Comparer ces deux fonctions suivant les valeurs de x.

Solution :
Pour comparer deux fonctions, on peut étudier le signe de leur différence :
$(f-g)(x) = x^2 - x = x(x-1)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	-	+	+	
$(x-1)$	-	-	+	
$f-g$	+	-	+	
	$f \geq g$	$f \leq g$	$f \geq g$	

Si $x \in \left]-\infty;0\right]$: $f \geq g$
Si $x \in [0;1]$: $f \leq g$
Si $x \in [1;+\infty[$: $f \geq g$