Le second degré

I. Introduction

- $(4x-1)^2-9=0$ c'est une équation du second degré

  $(4x-1-3)(4x-1+3)=0$

  $(4x-4)(4x-2)=0$

  $4x-4=0$ ou $4x-2=0$

  $x=1$ ou $x=-\frac{1}{2}$

  $S=\{-\frac{1}{2};1\}$

- $(2x+1)^2-3=0$ c'est une équation du second degré

  $(2x+1-\sqrt{3})(2x+1+\sqrt{3})=0$

  $2x+1-\sqrt{3}=0$ ou $2x+1+\sqrt{3}=0$

  $2x=\sqrt{3}-1$ ou $2x=1-\sqrt{3}$

  $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ou $x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

  $S=\{\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}-1}{2}\}$

- $(x+1)^2+16=0$ c'est une équation du second degré

  $(x+1)^2=-16$

  Cette équation n'a pas de solution car le carré d'un nombre réel ne peut pas être négatif.

  $S=\varnothing$

- $3x^2-x=0$

  $x(3x-1)=0$

  $x=0$ ou $3x-1=0$

  $x=\frac{1}{3}$

  $S=\{0;\frac{1}{3}\}$

II. Trinôme du second degré

1. Définition :

Un trinôme du second degré est une expression de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, b réel et c réel.

Exemple :

$P(x) = \sqrt{7}x^2 + \pi x + \frac{1}{2}$

$P(x) = x^2$

…

2. Forme canonique d'un trinôme :

$P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, b réel et c réel

$$P(x) = a\left(\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + \frac{c}{a}\right)$$

On reconnaît dans $\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$ le début de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ car $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$

donc $P(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$

$\boxed{P(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)}$ Forme canonique du trinôme

Exemple :

$P(x) = 2x^2 - 5x + 2$

$P(x) = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right)$

$P(x) = 2\left(\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + 1\right)$

$P(x) = 2\left(\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right)$ Forme canonique du trinôme

Résoudre : $2x^2-5x+2=0$

$$2\left(\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right)=0$$

$$2\left(\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)=0$$

$$2\left(\left(x-\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)\right)=0$$

$$2\left((x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)=0$$

$x-2=0$ ou $x-\frac{1}{2}=0$

$x=2$ ou $x=\frac{1}{2}$

$S=\{2;\frac{1}{2}\}$

3. Discriminant du trinôme :

On note Δ le discriminant du trinôme.

$$\Delta=b^2-4ac$$

La forme canonique peut alors s'écrire :

$$P(x)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

III. Equation du second degré et factorisation du trinôme

1. Résolution d'une équation du second degré :

Nous cherchons ici à trouver une méthode pour résoudre les équations du type : $ax^2+bx+c=0$

Cette équation est équivalente à : $a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=0$

3 cas se présentent :

- $\Delta > 0$

Si $\Delta > 0$, on a $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$

L'équation devient :

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0 \qquad (\text{car } a^2-b^2=(a-b)(a+b)\ )$$

On obtient 2 résultats :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \quad \text{ou} \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=0$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $\Delta = 0$

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=0 \ \text{ équivaut à } \ a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

On obtient une seule solution : $x+\frac{b}{2a}=0$ soit $x=-\frac{b}{2a}$ (solution double)

- $\Delta < 0$

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=0 \ \text{ équivaut à } \ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

L'équation n'a pas de solution car $\frac{\Delta}{4a^2}<0$ et un carré ne peut pas être négatif.

<u>Factorisation du trinôme :</u>

- $\Delta > 0$ $\qquad ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$
- $\Delta = 0$ $\qquad ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$
- $\Delta < 0$ $\qquad$ pas de factorisation

2. Résultats à retenir :

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$
Et $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminant)

Conditions sur Δ	Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$	Factorisation de $P(x)$
$\Delta > 0$	2 solutions : $x' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x'' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$P(x) = a(x-x')(x-x'')$
$\Delta = 0$	1 solution « double » : $x' = -\dfrac{b}{2a}$	$P(x) = a(x-x')^2$
$\Delta < 0$	Pas de solution	Pas de factorisation

*Tableau récapitulatif des résultats **à retenir***

3. Exemples d'utilisation des formules :

Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation $P(x) = 0$ et factoriser $P(x)$.

1. $P(x) = -2x^2 - 5x + 3$
2. $P(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{4}$
3. $P(x) = -2x^2 + 3x - 4$
4. $P(x) = x^2 + 16x + 63$
5. $P(x) = -3x^2 + 9x + 30$

Solutions :

1. $P(x) = -2x^2 - 5x + 3$
$\Delta = 5^2 - 4(-2)(3) = 25 + 24 = 49 = 7^2$
On est donc dans le cas $\Delta > 0$.

$P(x)$ admet deux racines :
$x' = \dfrac{5+7}{-4} = -3$ et $x'' = \dfrac{5-7}{-4} = \dfrac{1}{2}$
$S_1 = \{-3; \dfrac{1}{2}\}$

Factorisation : $P(x)=-2x^2-5x+3=-2(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$P(x)=(x+3)(-2x+1)$

2. $P(x)=x^2-x+\frac{1}{4}$

$\Delta=1-4\times\frac{1}{4}=0$

On est donc dans le cas $\Delta=0$.

$P(x)$ admet une seule racine :

$x'=\frac{-b}{2a}=\frac{1}{2}$ donc $S_2=\{\frac{1}{2}\}$

Factorisation : $P(x)=x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

3. $P(x)=-2x^2+3x-4$

$\Delta=9-4(-2)(-4)=-23$

On est donc dans le cas $\Delta<0$. Il n'y a pas de solution à l'équation $-2x^2+3x-4=0$ et ce polynôme n'est pas factorisable.

4. $P(x)=x^2+16x+63$

$\Delta=16^2-4(63)=4=2^2$

$P(x)$ admet deux racines :

$x'=\frac{-16+2}{2}=-7$ et $x''=\frac{-16-2}{2}=-9$

$S_4=\{-9;-7\}$

Factorisation : $P(x)=x^2+16x+63=(x+9)(x+7)$

5. $P(x)=-3x^2+9x+30$

$\Delta=9^2-4(-3)(30)=441=21^2$

$P(x)$ admet deux racines :

$x'=\frac{-9+21}{-6}=-2$ et $x'=\frac{-9-21}{-6}=5$

$S_5=\{-2;5\}$

Factorisation : $P(x)=-3x^2+9x+30=-3(x+2)(x-5)$

4. Remarques importantes :

- Dans l'équation $ax^2+bx+c=0$, si a et c sont de signes contraires, il est certain que l'équation admet une solution.

  En effet, dans ce cas in a $ac \leq 0$ donc $-4ac \geq 0$. Comme $b^2 \geq 0$, $\Delta = b^2-4ac \geq 0$ donc l'équation admet au moins une solution.

- Si il n'y a pas de terme en x ou pas de terme constant dans l'équation, il est inutile et déconseillé d'utiliser Δ.

  Exemple :
  $$4x^2-1=0$$
  $$4x^2=1$$
  $$x^2=\frac{1}{4}$$
  $$x=\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x=-\frac{1}{2}$$

  Exemple :
  $$3x^2+6x=0$$
  $$x(3x+6)=0$$
  $$x=0 \quad \text{ou} \quad 3x+6=0$$
  $$x=-\frac{6}{3}$$

5. Somme et produit des racines d'une équation du second degré :

Si $\Delta \geq 0$: $x'=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x''=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ (si $\Delta=0$, $x'=x''=\dfrac{-b}{2a}$)

$$S=x'+x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$P=x'.x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

Résultats à retenir :

Si $\Delta \geq 0$, les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ ont pour somme $S=-\dfrac{b}{a}$ et comme produit $P=\dfrac{c}{a}$.

Utilisation :

- Vérification des résultats : permet de vérifier que les solutions trouvées à l'équation sont justes.
  Exemple : $-x^2+3x+10=0$
  $\Delta = 3^2-4(-1)(10)=49=7^2$ $\quad x'=\dfrac{-3+7}{-2}=-2$ et $x'=\dfrac{-3-7}{-2}=5$
  On doit retrouver $S=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-3}{-1}=3$ et $P=\dfrac{c}{a}=\dfrac{10}{-1}=-10$
  Et on a bien $S=x'+x''=-2+5=3$ et $P=x'x''=-2\times 5=-10$
  A priori, on ne s'est pas trompé dans le calcul des solutions à l'équation.

- Résoudre une équation dont une racine est évidente (résolution plus rapide)
  Exemple : $10x^2-5x-5=0$
  $x'=1$ est une solution de cette équation. Notons x'' la deuxième solution. On sait que $S=x'+x''=1+x''=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{5}{10}$. Donc $x''=\dfrac{5}{10}-1=-\dfrac{5}{10}$.

- Résoudre mentalement les équations simples.
  Exemple : $x^2-5x+6=0$
  S'il y a des racines : $S=5$ et $P=6$
  Les racines qui vérifient ces deux conditions sont 2 et 3.

  $x^2+x-6=0$
  S'il y a des racines : $S=-1$ et $P=-6$
  Les racines qui vérifient ces deux conditions sont 2 et -3.

6. Exemples d'équation se ramenant au second degré :

<u>Les équations bicarrées :</u>

1. $x^4+3x^2+2=0$

C'est une équation du quatrième degré, mais qui peut ramenée au second degré par un **changement de variable** :

On pose $U=x^2$

L'équation devient : $U^2+3U+2=0$
$U'=-1$ est solution. Trouvons l'autre solution : $Somme=-3$ donc $U''=-2$ est également solution.
Il faut donc que $x^2=-3$ ou $x^2=-1$. Dans les deux cas, c'est impossible car un carré ne peut pas être négatif.
L'équation n'a donc pas de solution.
$S=\varnothing$

2. $5x^4 - 3x^2 - 14 = 0$

On pose $U = x^2$

L'équation devient : $5U^2 - 3U - 14 = 0$

$\Delta = 9 - 4(5)(-14) = 289 = 17^2$

$U' = \frac{3+17}{10} = 2$ ou $U'' = \frac{3-17}{10} = \frac{-7}{5}$

$x^2 = 2$ ou $x^2 = \frac{-7}{5}$

$x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ pas de solution

$S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

3. $3x^4 - 4x^2 + 1 = 0$

On pose $U = x^2$

L'équation devient : $3U^2 - 4U + 1 = 0$

$\Delta = 16 - 4(3) = 4 = 2^2$

$U' = \frac{4+2}{6} = 1$ ou $U'' = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$

$x^2 = 1$ ou $x^2 = \frac{1}{3}$

$x = -1$ ou $x = 1$ $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ ou $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$

$S = \{-1; -\sqrt{\frac{1}{3}}; \sqrt{\frac{1}{3}}; 1\}$

4. $4x^4 - 20x^2 + 25 = 0$

L'équation équivaut à $(2x^2 - 5)^2 = 0$

$2x^2 - 5 = 0$

$x^2 = \frac{5}{2}$

$x = \sqrt{\frac{5}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$

$S = \{-\sqrt{\frac{5}{2}}; \sqrt{\frac{5}{2}}\}$

<u>Autre exemple de changement de variable :</u>

$x-5\sqrt{x}+6=0$
On pose $U=\sqrt{x}$

L'équation devient : $U^2-5U+6=0$

On résout l'équation : $U'=2$ et $U''=3$

Calcul de x :
$\sqrt{x}=2$ ou $\sqrt{x}=3$
$x=4$ ou $x=9$
$S=\{4;9\}$

IV. Signe du trinôme et inéquation du second degré

1. Signe du trinôme :

$P(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$

- Si $\Delta>0$ on a $P(x)=a(x-x')(x-x'')$
  Supposons que $x'<x''$

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
$x-x'$		-	0	+	|	+	
$x-x''$		-	|	-	0	+	
$(x-x')(x-x'')$		+	0	-	0	+	
$P(x)=a(x-x')(x-x'')$		Signe de a	0	signe de -a	0	Signe de a	

- Si $\Delta=0$ on a $P(x)=a(x-x')^2$
  $(x-x')^2$ est toujours positif, donc $P(x)$ est toujours du signe de a.

- Si $\Delta<0$ on a $P(x)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$

  $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ et $-\frac{\Delta}{4a^2}>0$ donc $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$

  $P(x)$ est toujours du signe de a.

Conclusion à retenir :

Le trinôme est toujours du signe de *a*, sauf « entre les racines » lorsqu'il y a 2 racines distinctes.

2. Exemples d'application à des résolutions d'inéquations :

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $3x^2+2x-1>0$

2. $-5x^2+2x-2<0$

3. $-x^2+2x\sqrt{5}-5<0$

4. $\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x}\leq -2$

Solutions :

1. $3x^2+2x-1>0$

On voit tout de suite que $x'=-1$ et comme $x'.x''=-\frac{1}{3}$, on a $x''=\frac{1}{3}$

$3x^2+2x-1$ est du signe de *a* (c'est-à-dire de 3) en dehors des racines.

x	$-\infty$		$x'=-1$		$x''=\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x^2+2x-1$		+	0	-	0	+	

Donc $S_1=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

2. $-5x^2+2x-2<0$

$\Delta=4-4(-5)(-2)=-36$

$-5x^2+2x-2$ n'a pas de racine et est donc toujours du même signe que *a*, c'est-à-dire toujours négatif.

Donc $S_2=\mathbb{R}$

3. $-x^2+2x\sqrt{5}-5<0$

$\Delta = 20-4(-1)(-5)=0$

$-x^2+2x\sqrt{5}-5$ est donc toujours du même signe que *a*, c'est-à-dire toujours négatif ou nul quand $x=x'$.

$$x' = -\frac{2\sqrt{5}}{-2}=\sqrt{5}$$

Ici, nous recherchons les valeurs de Donc x pour lesquels le polynôme est strictement négatif, il faut donc exclure la racine des solutions.

Donc $S_3=\mathbb{R}-\{\sqrt{5}\}$ qui s'écrit également $S_3 = \left]-\infty;\sqrt{5}\right[\cup\left]\sqrt{5};+\infty\right[$

4. $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{x}\leq -2$

$$\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x}+2\leq 0$$

Soit $P_4(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{3}{x}+2$

$$P_4(x)=\frac{x+3(x+2)+2x(x+2)}{x(x+2)}$$

$$P_4(x)=\frac{x+3x+6+2x^2+4x}{x(x+2)}=\frac{2x^2+8x+6}{x(x+2)}$$

On note $P_4(x)=\dfrac{2x^2+8x+6}{x(x+2)}=\dfrac{N(x)}{D(x)}$

Pour $N(x)$:

$\Delta = 64-4(2)(6)=16=4^2$

$x'=\dfrac{-8+4}{4}=-1$ et $x''=\dfrac{-8-4}{4}=-3$

$D(x)$ s'annule en 0 et en -2.

On dresse le tableau de signe de $P_4(x)$:

x	$-\infty$		$x'=-3$		-2		$x''=-1$		0		$+\infty$
$N(x)$		+	0	-		-	0	+		+	
$D(x)$		+		+	0	-		-	0	+	
$P_4(x)$		+	0	-	‖	+	0	-	‖	+	

Donc $S_4=\left[-3;-2\right[\cup\left[-1;0\right[$

V. Applications des résultats précédents

1. Simplification de fractions rationnelles :

Après avoir factorisé le numérateur et le dénominateur, donner l'ensemble de définition de la fraction rationnelle et la simplifier.

- $R_1(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{-4x^2 - x + 3} = \dfrac{N_1(x)}{D_1(x)}$

$N_1(x) = 2x^2 + x - 1$

$x' = -1 \quad \text{et} \quad x'' = -\dfrac{1}{2}$

$N_1(x) = a(x - x'(x - x'') = 2(x+1)(x - \dfrac{1}{2})$

$N_1(x) = (x+1)(2x-1)$

$D_1(x) = -4x^2 - x + 3$

$x' = -1 \quad \text{et} \quad x'' = \dfrac{3}{4}$

$D_1(x) = -4(x+1)(x - \dfrac{3}{4})$

$D_1(x) = (x+1)(-4x+3)$

Ensemble de définition : il faut que $D_1(x) \neq 0$ car un dénominateur ne peut pas être nul.

Ensemble de définition : $\mathbb{R} - \{-1; \dfrac{3}{4}\}$

Simplification : $R_1(x) = \dfrac{(x+1)(2x-1)}{(x+1)(-4x+3)} = \dfrac{2x-1}{-4x+3}$ sur l'ensemble de définition

- $R_2(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 3}{8x^2 - 14x + 5} = \dfrac{N_2(x)}{D_2(x)}$

$N_2(x) = 2x^2 - 7x + 3$

$\Delta = 49 - 24 = 25 = 5^2$

$x' = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x'' = \dfrac{7+5}{4} = 3$

$N_2(x) = 2(x-3)(x - \dfrac{1}{2})$

$D_2(x) = 8x^2 - 14x + 5$
$\Delta = 196 - 4 \times 8 \times 5 = 36 = 6^2$
$x' = \dfrac{14-6}{16} = \dfrac{1}{2}$ et $x'' = \dfrac{14+6}{16} = \dfrac{5}{4}$

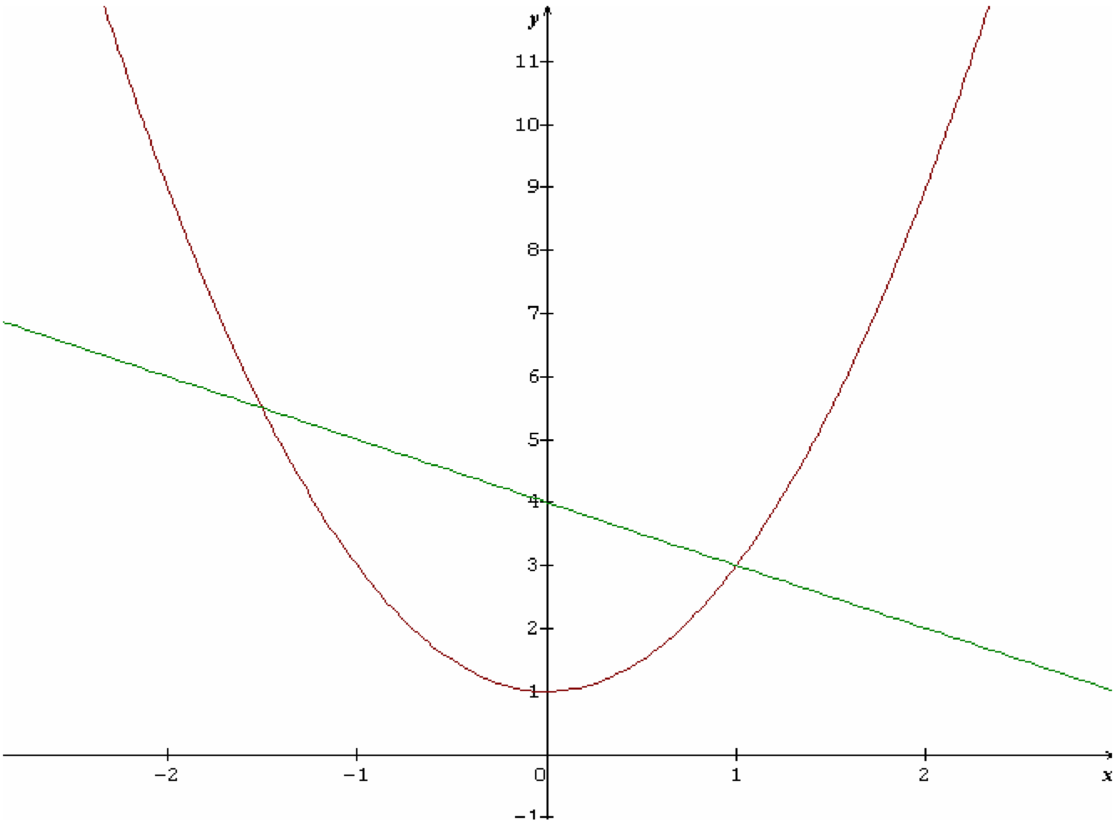
$D_2(x) = 8(x - \dfrac{1}{2})(x - \dfrac{5}{4})$
$D_2(x) = (2x-1)(4x-5)$

$R_2(x)$ existe si $D_2(x) \neq 0$ donc si $x \neq \dfrac{1}{2}$ et $x \neq \dfrac{5}{4}$
Ensemble de définition : $\mathbb{R} - \{\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{4}\}$
Simplification : $R_2(x) = \dfrac{x-3}{4x-5}$ sur l'ensemble de définition.

2. Intersection relative de droites et de courbes :

- Dans le plan muni d'un repère orthogonal, construire la droite D d'équation $y = -x + 4$ et la parabole P d'équation $y = 2x^2 + 1$.

On pose $\Delta(x) = 2x^2 + 1 - (-x + 4)$
Résoudre l'équation $\Delta(x) = 0$ et l'inéquation $\Delta(x) > 0$.
Donner une interprétation graphique des résultats.



$\Delta(x) = 2x^2 + 1 - (-x + 4)$
$\Delta(x) = 2x^2 + x - 3$

Résolution de $\Delta(x) = 0$:

$x' = 1$ et comme $x'x'' = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2}$, on a $x'' = -\frac{3}{2}$

$S = \{-\frac{3}{2} ; 1\}$

Résolution de $\Delta(x) > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$\Delta(x)$		+	0	-	0	+	

$S = \left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]1 ; +\infty\right[$

Interprétation graphique :

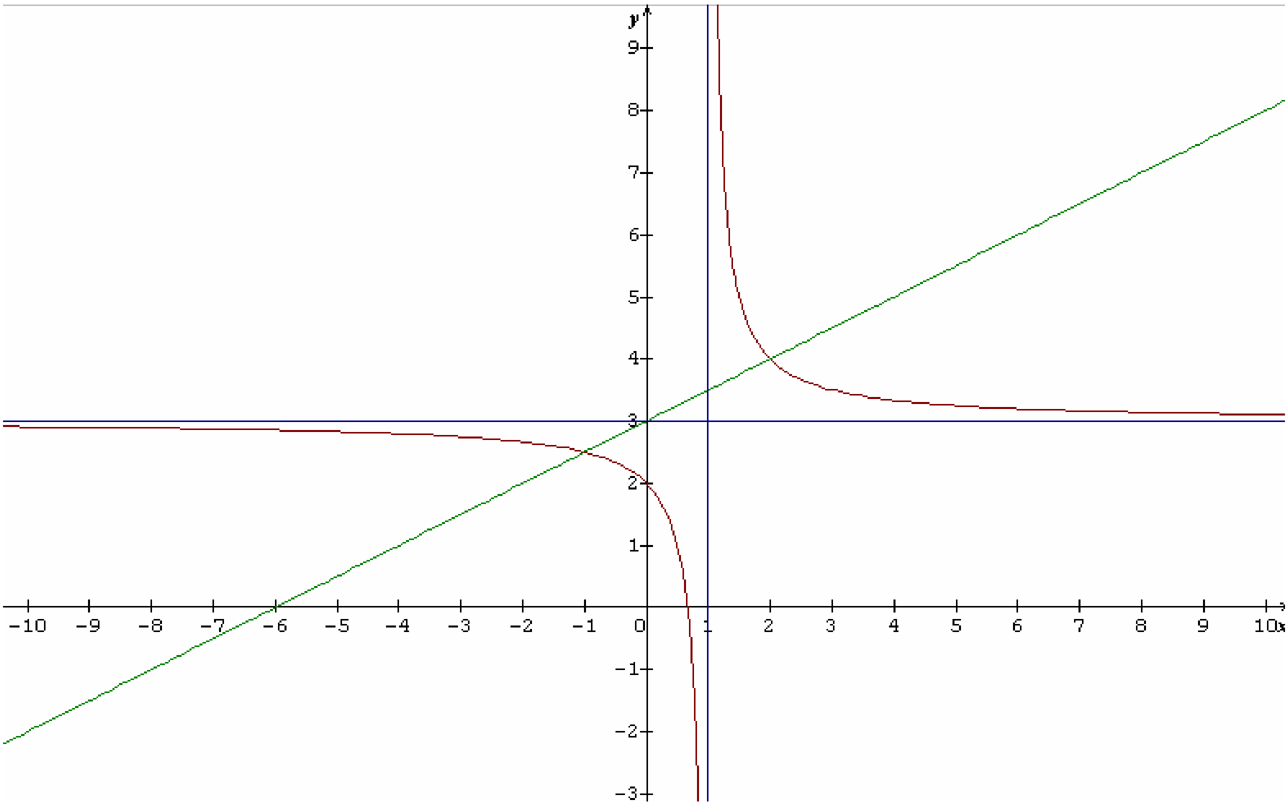
$\Delta(x) = 0$ signifie $2x^2 + 1 = -x + 4$
Les solutions de l'équation $\Delta(x) = 0$ sont les abscisses des points communs à P et à D.

$\Delta(x) = 0$ signifie $2x^2 + 1 > -x + 4$, c'est-à-dire P au-dessus de D.
Les solutions de l'équation $\Delta(x) > 0$ sont les abscisses des points de P situés au-dessus de D.

- Construire la droite D d'équation $y = \frac{1}{2}x + 3$ et l'hyperbole H d'équation $y = 3 + \frac{1}{x-1}$

On note $S(x) = 3 + \frac{1}{x-1} - \left(\frac{1}{2}x + 3\right)$

Etudier le signe de $S(x)$ suivant les valeurs de *x*. En déduire la position relative de D et de H suivant les valeurs de *x*.



$$S(x)=3+\frac{1}{x-1}-\left(\frac{1}{2}x+3\right)$$

$$S(x)=3+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}x-3=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}x$$

$$S(x)=\frac{2-x(x-1)}{2(x-1)}$$

$$S(x)=\frac{-x^2+x+2}{2(x-1)}$$

$-x^2+x+2$

$x'=-1$ et $x'x''=-2$ donc $x''=2$

Etude du signe de $S(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		-	0	+	|	+	0	-	
$2(x-1)$		-		-	0	+		+	
$S(x)$		+	0	-	||	+	0	-	
Interprétation graphique		$3+\frac{1}{x-1}>\frac{1}{2}x+3$ H au-dessus de D		H en dessous de D		H au-dessus de D		H en dessous de D	

H et D se coupent en $\left(-1;\frac{5}{2}\right)$

H et D se coupent en $(2;4)$

3. Exemple d'équation irrationnelle :

Méthode pour résoudre une équation du type $\sqrt{A} = B$:

$\sqrt{A} = B$ équivaut à $\begin{cases} A = B^2 \\ B \geq 0 \end{cases}$

Exemple : Résoudre l'équation suivante : $\sqrt{2x+5} = 3x-3$

Cette équation équivaut à :

$$\begin{cases} 2x+5 = (3x-3)^2 \\ 3x-3 \geq 0 \end{cases}$$

Le résultat trouvé devra donc satisfaire $2x+5=(3x-3)^2$ **et** $3x-3 \geq 0$.

$3x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Résolution de $2x+5=(3x-3)^2$:

L'équation équivaut à $2x+5 = 9x^2-18x+9$
$9x^2-16x+4=0$
$\Delta = 400-4(4)(9) = 256 = 16^2$

$$x' = \frac{20+16}{18} = 2 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{20-16}{18} = \frac{2}{9}$$

$x' = 2$ satisfait $2x+5=(3x-3)^2$ **et** $3x-3 \geq 0$ puisque $x' \geq 1$
$x'' = \dfrac{2}{9}$ ne satisfait pas $2x+5=(3x-3)^2$ **et** $3x-3 \geq 0$ puisque $x'' < 1$

La solution est donc $S = \{2\}$