Suites numériques
III - Les suites géométriques

1. Définition :

Une suite de terme général u_n est une suite géométrique si chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par une constante. Cette constante est alors appelée raison de la suite.

$$u_{n+1} = u_n \times q \qquad \text{avec } q \text{ constante (raison de la suite)}$$

De même que la suite arithmétique, la suite géométrique est déterminée par la donnée de :
- Son premier terme
- Sa raison

Pour prouver qu'une suite est géométrique, il faut démontrer que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant (indépendante de *n*).

Exemples :

Ecrire quelques uns des premiers termes des suites géométriques suivantes :

- 1er terme : 1 raison : 2

1 2 4 8 16 32 64 128…

- 1er terme : 1 raison : -1

1 -1 1 -1 1 -1 1…

- 1er terme : 1 raison : $-\frac{1}{4}$

$1 \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{1}{16} \quad -\frac{1}{64} \quad \frac{1}{256} \quad -\frac{1}{1024} \ldots$

2. Expression du terme général d'une suite géométrique :

$u_0 \ \boxed{\times q} \ u_1 = u_0 \times q \ \boxed{\times q} \ u_2 = u_0 \times q^2 \ \boxed{\times q} \ u_3 = u_0 \times q^3 \ldots$

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{et} \quad u_n = u_i \times q^{n-i}$$

Exemples :

$u_{10} = u_6 \times q^4$

$u_{15} = u_{11} \times q^4$

$u_{26} = u_{12} \times q^{14}$ …

1^er^ exercice :

Les suites suivantes sont géométriques. Exprimer u_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

1. $u_0 = -2$ et la raison est $-\dfrac{1}{2}$

2. $u_0 = -1$ et la raison est -1

Solution :

1. $u_n = -2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

2. $u_n = -1(-1)^n$

$u_n = (-1)^{n+1}$

2^ème^ exercice :

Les suites suivantes, de terme général u_n, sont géométriques et de raison b. Déterminer l'entier i dans chacun des cas suivants :

1. $u_0 = 4, u_i = \dfrac{1}{4}, b = \dfrac{1}{2}$

2. $u_1 = \dfrac{2}{3}, u_5 = \dfrac{8}{243}, u_i = \dfrac{4}{27}$

3. $u_3 = -16, u_7 = -1, u_i = \dfrac{1}{8}$

Solution :

1. $u_n = 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ donc $u_i = 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^i = \dfrac{1}{4}$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^i = \dfrac{1}{16}$

$\dfrac{1}{2^i} = \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{2^4}$ donc $2^i = 2^4$ donc $i = 4$

2. Essayons de déterminer b : $u_5 = u_1 \times b^4 = \dfrac{2}{3} \times b^4 = \dfrac{8}{243}$

$\frac{2}{3} \times b^4 = \frac{8}{243}$ donc $b^4 = \frac{8 \times 3}{243 \times 2} = \frac{4}{81} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^4$ donc $b = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ou $b = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

Si $b = \frac{\sqrt{2}}{3}$:

$u_i = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{i-1} = \frac{4}{27}$

donc $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{i-1} = \frac{2}{9}$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{i-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$

donc $i - 1 = 2$ donc $i = 3$

On obtiendrait le même résultat en prenant $b = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

3. $u_7 = u_3 \times b^4 = -16 \times b^4 = -1$

donc $b^4 = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

On a $b = \frac{1}{2}$ ou $b = -\frac{1}{2}$

$u_i = u_7 \times b^{i-7}$

$\frac{1}{8} = (-1) b^{i-7}$

On étudie les 2 cas :

Si $b = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{8} = (-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{i-7}$

$-\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-7}$ n'a pas de solution car $\left(\frac{1}{2}\right)^{i-7}$ est positif.

Si $b = -\frac{1}{2}$: $\frac{1}{8} = (-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-7}$

$-\frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{i-7}$

Donc $i - 7 = 3$ soit $i = 10$

3. Sommes des termes consécutifs d'une suite géométrique :

On cherche : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n$

Trouvons la formule :

$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \ldots + u_0 q^{n-1} + u_0 q^n$
$S = u_0 (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n)$
et $qS = u_0 (q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1})$

donc $S - qS = u_0 (1 - q^{n+1})$
$S(1 - q) = u_0 (1 - q^{n+1})$

Si $q \neq 1$, on a : $S = \dfrac{u_0 (1 - q^{n+1})}{1 - q}$

Formule à retenir :

Si u_n est le terme général d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$, alors :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

ou encore :

$$\text{somme des termes consécutifs} = \text{1er terme} \frac{1 - raison^{\text{nb de termes}}}{1 - raison}$$

Exercices :

Calculer :
1. $S = 2 + 4 + 8 + \ldots + 256$
2. $S = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{32} + \ldots + \dfrac{1}{128}$
3. $S = 1 + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{100} + \ldots + \dfrac{1}{10^5}$

Solutions :

1. $S = 2 + 4 + 8 + \ldots + 256$
$S = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^8$
C'est la somme d'une suite géométrique de premier terme 2 et de raison 2. La somme comporte 8 termes.

$$S = 2\frac{1-2^8}{1-2} = 2\frac{1-256}{1-2} = 510$$

2. $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots + \frac{1}{128}$

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2}\times\frac{1}{64} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

C'est la somme d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{4}$. La somme comporte 4 termes.

$$S = \frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^4}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{1}{256}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{256}\right)$$

$$S = \frac{2}{3}\times\frac{255}{256} = \frac{85}{128}$$

3. $S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots + \frac{1}{10^5}$

$$S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^5}$$

C'est la somme d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{10}$. La somme comporte 6 termes.

$$S = 1\times\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^6}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1-0,000001}{0,9} = \frac{0,999999}{0,9}$$

$$S = 1,11111$$

4. Sens de variation d'une suite géométrique :

$$u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0 q^n (q-1)$$

Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$:

Cas où u_0 est positif :

- Si $q < 0$: q^n n'a pas un signe constant, la suite n'est donc pas monotone.

- Si $q > 0$: $q^n > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est alors le signe de $(q - 1)$
  - $0 < q < 1 \Rightarrow q - 1 < 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$
    La suite est décroissante
  - $q > 1 \Rightarrow q - 1 > 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$
    La suite est croissante
  - $q = 1 \Rightarrow q - 1 = 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 0$
    La suite est constante

Théorème à retenir :

Une suite géométrique de premier terme positif et de raison positive est :

- Croissante si sa raison est strictement supérieure à 1
- Décroissante si sa raison est strictement inférieure à 1
- Constante si sa raison est égale à 1.

Exemples :

$u_n = 2^n$, suite de premier terme 1 et de raison 2 $\Rightarrow$ La suite est croissante

$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, suite de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ La suite est décroissante