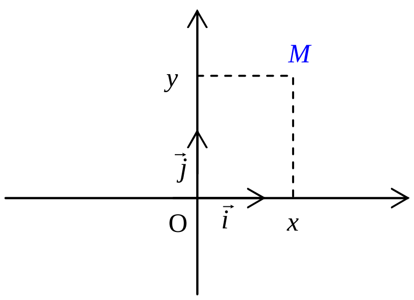
Géométrie analytique

I. Base, repère et coordonnées

1. Le repérage :

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan.

Pour tout point *M*, il existe un couple unique de réels *(x,y)* tel que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$



Soit $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base du plan vectoriel.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un couple unique de réels *(x,y)* tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

2. Propriétés algébriques :

Soit $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base du plan vectoriel et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

- $\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à $x = 0$ et $y = 0$
- $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$
- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
- $\alpha\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$

3. Coordonnées d'un vecteur :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et les deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$,

4. Distance entre deux points :

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

La distance entre les deux points est : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

II. Colinéarité, orthogonalité et norme de vecteurs

1. Colinéarité :

Chacune des propriétés suivantes traduit la colinéarité des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

- Les coordonnées de l'un sont proportionnelles à celles de l'autre.
- *xy'-yx'=0*, c'est-à-dire que le déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ vaut 0.

Le déterminant de deux vecteurs $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ est : $dét(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$

2. Orthogonalité et norme de vecteurs :

- **Orthogonalité :**

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, ils sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, donc si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

- **Norme :**

La norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

III. Les droites

1. Équation cartésienne d'une droite :

Toute droite admet une équation de la forme $ax+by+c=0$, où l'un des deux réels a et b n'est pas nul.

<u>Réciproquement :</u> Si a ou b est non nul, $ax+by+c=0$ est l'équation d'une droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Cas particuliers :
Droite parallèle à l'axe des abscisses : équation de la forme $y=k$
Droite parallèle à l'axe des ordonnées : équation de la forme $x=k$

2. Équation réduite :

Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation réduite unique de la forme :

$$y=ax+b$$

a est le coefficient directeur de la droite et un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$.

3. Conditions de parallélisme :

Soient la droite D d'équation réduite $y=ax+b$ et D' d'équation réduite $y=a'x+b'$

D et D' sont parallèles si et seulement si $a=a'$.

4. Conditions d'orthogonalité :

Soient la droite D d'équation réduite $y=ax+b$ et D' d'équation réduite $y=a'x+b'$

D et D' sont orthogonales si et seulement si $a.a'=-1$.