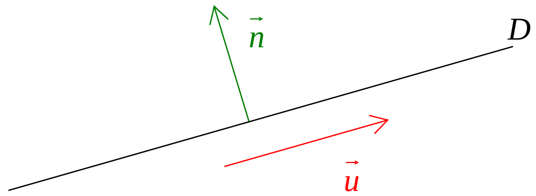
Applications du produit scalaire

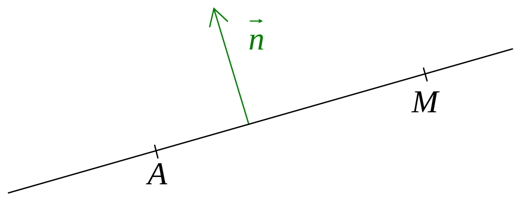
I. Vecteur normal à une droite

1. Définition :



Dire que $\vec{n}$ ($\vec{n} \neq \vec{0}$) est un vecteur normal à D de vecteur directeur $\vec{u}$ signifie que $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

2. Caractérisation d'une droite par un point *A* et un vecteur normal $\vec{n}$:



M appartient à la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = \vec{0}$.

3. Vecteur normal d'une droite d'équation $ax + by + c = 0$:

Pour toute droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ (avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$), un vecteur normal est : $\vec{n}(a;b)$

Démonstration :

Soit $N_0(x_0; y_0)$ un point de la droite *D* d'équation $ax+by+c=0$.
On a donc $ax_0+by_0+c=0$
De même, pour tout point $M(x;y)$ de *D*, on a $ax+by+c=0$

Donc $(ax+by+c)-(ax_0+by_0+c)=0$ donc $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

N_0 et M appartiennent à *D* donc $\overrightarrow{N_0M}$ est un vecteur directeur de *D*.

Notons $\vec{n}(a;b)$. L'expression $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ signifie que $\vec{n}.\overrightarrow{N_0M}=0$ donc $\vec{n}(a;b)$ est orthogonal à $\overrightarrow{N_0M}$, et est par conséquent un vecteur normal à *D*.

II. Cercle

1. Cercle défini par son centre et son rayon :

Soit *C* le cercle de centre Ω et de rayon *R*.

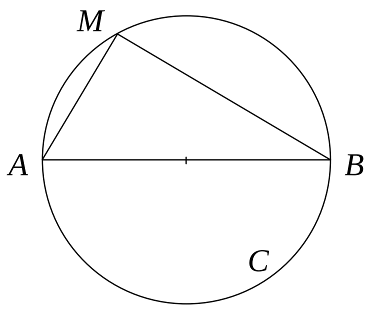
$M \in C \Leftrightarrow \Omega M = R$

De même $M \in C \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$ car $\Omega M \geq 0$ et $R \geq 0$.

Exemple :
Soient $\Omega(1;-2)$ et $R=2$
Trouver l'équation du cercle *C* de centre Ω et de rayon *R*.

Soit $M(x;y)$
$M \in C \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$
$M \in C \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}\right)^2 = 4$
$M \in C \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=4$
$M \in C \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=4$
$M \in C \Leftrightarrow x^2+y^2-2x+4y+1=0$ est l'équation cartésienne de *C*.

2. Cercle défini par un diamètre :



$$M \in C \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$$

Exemple :

Soient $A(-1;3)$ et $B(2;2)$

Trouver l'équation du cercle C de diamètre $[AB]$.

Soit $M(x;y)$

$M \in C \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\overrightarrow{AM}(x+1;y-3)$ et $\overrightarrow{BM}(x-2;y-2)$

$M \in C \iff (x+1)(x-2)+(y-3)(y-2) = 0$

$M \in C \iff x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$ est l'équation cartésienne de C.

3. Reconnaître une équation de cercle :

Exemple :

Quel est le centre et le rayon du cercle C d'équation :

$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

$x^2 - 2x + y^2 - 6y + 5 = 0$

$(x-1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + 5 = 0$

$(x-1)^2 + (y-3)^2 - 5 = 0$

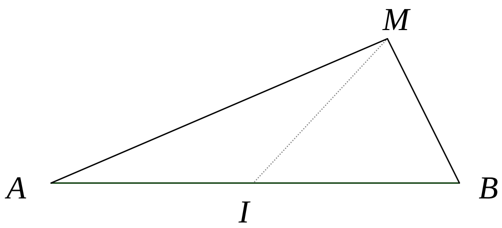
$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$

Le centre du cercle C est $\Omega(1;3)$ et son rayon $R = \sqrt{5}$

III. Théorème de la médiane

1. Enoncé du théorème :

Soient A et B deux points et I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M, on a :



$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

2. Démonstration du théorème :

- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI + IA}.\overrightarrow{MI + IB}$
  $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$
  $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 + \overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$
  $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 + \overrightarrow{MI}.(\vec{0}) + \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right).\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)$
  $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 + -\frac{1}{4}AB^2$

- $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$
  $MA^2 + MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$
  $MA^2 + MB^2 = MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2$
  $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + IA^2 + IB^2$
  $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\vec{0} + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$
  $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

3. Exemple d'utilisation :

Soient A et B deux points tels que $AB = 4$.

Déterminer l'ensemble ($F1$) des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ (ligne de niveau 0).
Déterminer l'ensemble ($F2$) des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -4$ (ligne de niveau -4).
Déterminer l'ensemble ($F3$) des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -20$ (ligne de niveau -20).
Déterminer l'ensemble ($F4$) des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 2$ (ligne de niveau 2).
Déterminer l'ensemble ($F5$) des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 8$.
Déterminer l'ensemble ($F6$) des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 16$.

- $M \in (F1)$ signifie $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$

$(F1)$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

- $M \in (F2)$ signifie $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -4$.

Soit I le milieu de $[AB]$. D'après le théorème de la médiane, on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4} = -4$

Donc $MI^2 - 4 = -4$ donc $MI = 0$. M est le milieu de $[AB]$.

$(F2) = \{I\}$

- $M \in (F3)$ signifie $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -20$.

D'après le théorème de la médiane, on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4} = -20$

Donc $MI^2 - 4 = -20$ donc $MI^2 = -16$ → Impossible !

$(F3) = \{\varnothing\}$

- $M \in (F4)$ signifie $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 2$.

D'après le théorème de la médiane, on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4} = 2$

Donc $MI^2 - 4 = 2$ donc $MI^2 = 6$, donc $MI = \sqrt{6}$ ($MI \geq 0$)

$(F4)$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{6}$.

- $M \in (F5)$ signifie $MA^2 + MB^2 = 8$.

D'après le théorème de la médiane, on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2} = 8$

$2MI^2 + \frac{16}{2} = 8$ donc $MI^2 = 0$ donc $MI = 0$

$MI = 0$. M est le milieu de $[AB]$ donc $(F5) = \{I\}$

- $M \in (F5)$ signifie $MA^2 + MB^2 = 16$.

D'après le théorème de la médiane, on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 16$

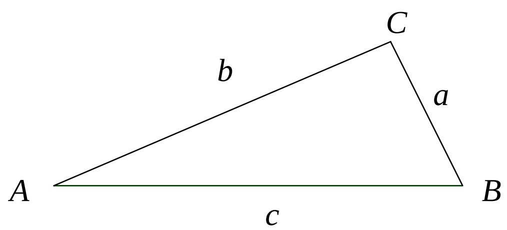
Donc $2MI^2 + 8 = 16$ donc $MI^2 = 4$, donc $MI = 2$ ($MI \geq 0$).

$(F5)$ est le cercle de centre I et de rayon 2.

IV. Relations d'Al Kashi et autres formules

1. Enoncé de la relation d'Al Kashi :

Soit le triangle ABC suivant, avec $AC = b$, $BC = a$ et $AB = c$

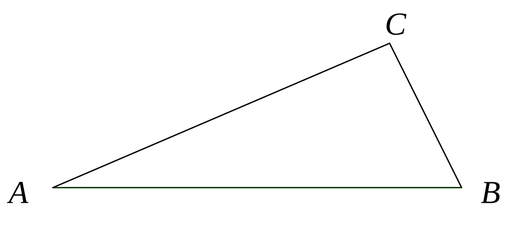


On a les égalités suivantes :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos \widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos \widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos \widehat{C}$$

2. Démonstration de la relation d'Al Kashi :

Soit un triangle ABC :



On a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|^2\right)$

(cf. formules du chapitre « Produit scalaire »)

Or $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - CB^2\right)$

donc $AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - CB^2\right)$

donc $2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} = AB^2 + AC^2 - CB^2$

donc $CB^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

On démontrerait de même les autres formules.

3. Aire du triangle :

Soit S l'aire du triangle, on a :

$$S = \frac{1}{2} bc \times \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C}$$

4. Formule des sinus :

On a :

$$\boxed{\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}}$$