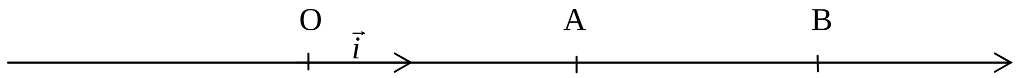
Produit scalaire

I. Quelques rappels

1. Mesure algébrique :

Soit $\vec{i}$ un vecteur unitaire.



$\overrightarrow{OA} = x_A \vec{i}$

$\overrightarrow{OB} = x_B \vec{i}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_B \vec{i} - x_A \vec{i} = (x_B - x_A)\vec{i}$

$x_B - x_A$ est appelé mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et est noté $\overline{AB}$ et on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\ \vec{i}$$

Si $\overrightarrow{AB}$ est de même sens que $\vec{i}$, $\overline{AB}$ est égal à la longueur de AB.
Si $\overrightarrow{AB}$ est de sens contraire à $\vec{i}$, $\overline{AB}$ est égal à l'opposé de la longueur de AB.

2. Produit des mesures algébriques de deux vecteurs :

Etudions le produit des mesures algébriques de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ de même direction (=ils sont « parallèles »)

- **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de même sens :**

$\overline{AB} \times \overline{CD} = AB \times CD$

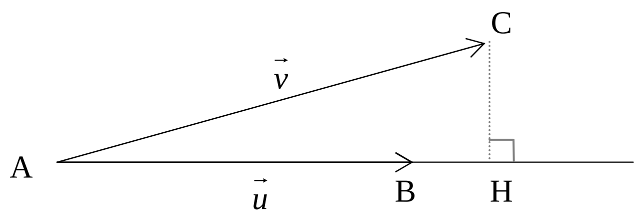
- **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont sens contraire :**

$\overline{AB} \times \overline{CD} = -AB \times CD$

II. Produit scalaire de deux vecteurs

1. Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et *A*, *B* et *C* trois plans du plan du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et soit *H* le projeté orthogonal de *C* sur *(AB)*.



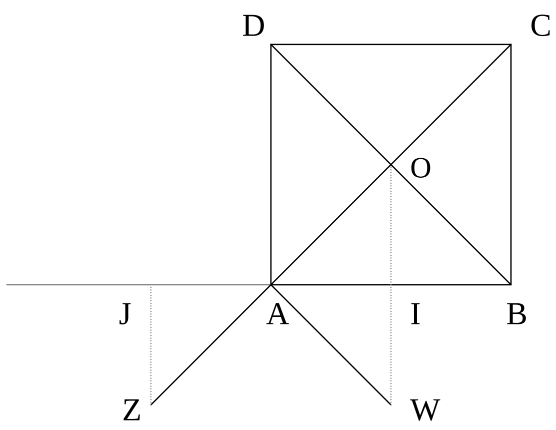
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est le **nombre réel** défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de la mesure algébrique de l'un par la mesure algébrique de la projection orthogonale de l'autre sur lui.

Exemples :

ABCD est un carré de 4 cm de côté et de centre O.



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(-\overrightarrow{AB}) = \overline{AB} \times (-\overline{AB}) = -16$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AW} = \overline{AB} \times \overline{AI} = 4 \times 2 = 8$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AZ} = \overline{AB} \times \overline{AJ} = 4 \times (-2) = -8$

2. Vecteurs orthogonaux :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Le vecteur nul est donc orthogonal à n'importe quel vecteur.

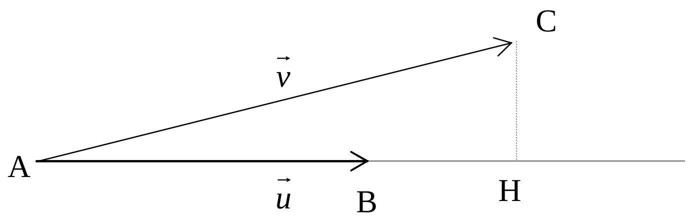
3. Produit scalaire et norme :

$$\vec{u}.\vec{u} = \overline{OA} \times \overline{OA} = OA^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2$$

Donc $\boxed{\left\|\vec{u}\right\|^2 = \vec{u}.\vec{u}}$

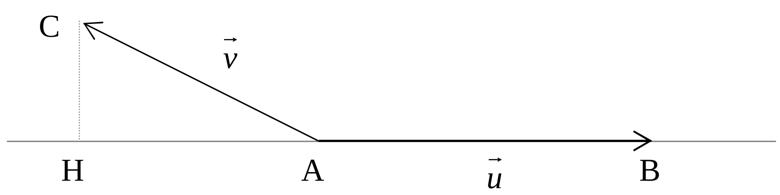
4. Expression du produit scalaire à l'aide d'un angle :

1er cas :



$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

2ème cas :



$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -AB \times AC \times (-\cos \widehat{BAC})$ car les angles $\widehat{HAC}$ et $\widehat{BAC}$ sont supplémentaires

$\vec{u}.\vec{v} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

alors : $\vec{u}.\vec{v} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

ou $\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$

1^er^ exemple :

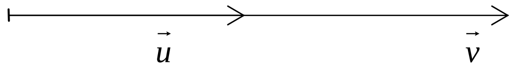
$$AB=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad AC=\sqrt{2}\quad \text{et}\quad \widehat{BAC}=60°$$

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}\times\cos 60°=\frac{1}{2}$$

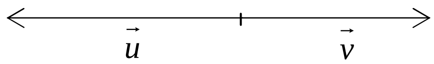
2^ème^ exemple : produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens :



Alors : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire :



Alors : $\vec{u}.\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

III. Propriétés du produit scalaire

1. Symétrie du produit scalaire :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$$

2. Règles de calcul sur le produit scalaire :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tout réel k on a :

$$\left(k\vec{u}\right).\vec{v}=k\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$$

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$$

3. Expression du produit scalaire dans un repère orthonormal :

Pour tous vecteurs $\vec{u}(x,y)$, $\vec{v}(x',y')$ dans un repère orthonormal, on a :

$$\vec{u}.\vec{v}=x.x'+y.y'$$

Exemple :

Dans le repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ soient $A(3,-4)$ et $B(4,3)$

Calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ et en déduire $\widehat{AOB}$.

D'après la formule ci-dessus, on a : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=3\times4+(-4)\times3=0$

Donc $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux, donc $\widehat{AOB}=90°$.

Soient $A'(2\sqrt{2},1)$ et $B'(-1,\sqrt{3})$

Calculer $\overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{OB'}$ et en déduire $\widehat{A'OB'}$.

On a : $\overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{OB'}=2\sqrt{2}\times(-1)+1\times\sqrt{3}=-2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Or $\overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{OB'}=OA'\times OB'\times\cos\widehat{A'OB'}$

$OA'=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{8+1}=3$

$OB'=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{1+3}=2$

Donc $\cos\widehat{A'OB'}=\dfrac{\overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{OB'}}{OA'\times OB'}=\dfrac{-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

$\widehat{A'OB'}=\cos^{-1}\widehat{A'OB'}$

Donc $\widehat{A'OB'}=100°$ à 1° près.

4. Expression du cosinus d'un angle avec le produit scalaire :

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$$

5. Norme et produit scalaire :

➢ Carré scalaire :

$$\left(\vec{u}\right)^2 = \vec{u}.\vec{u} = \left\|\vec{u}\right\|^2$$

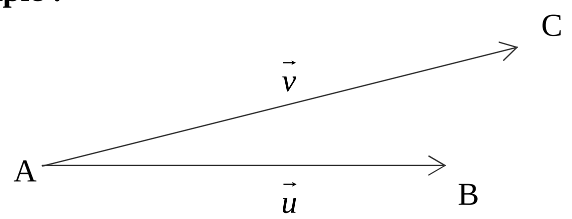
➢ Identités remarquables :

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \left(\vec{u}\right)^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \left(\vec{v}\right)^2$$
$$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 = \left(\vec{u}\right)^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \left(\vec{v}\right)^2$$
$$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2.\vec{u}.\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$$
$$\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 - 2.\vec{u}.\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$$
$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \left(\vec{u}\right)^2 - \left(\vec{v}\right)^2$$

➢ Expression du produit scalaire avec les normes des vecteurs :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$$

Par exemple :



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)$$

Or $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$

Donc $$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$