Variables aléatoires

I. Qu'est-ce qu'une variable aléatoire ?

1. Définition :

Soit une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats possibles (l'univers) est noté Ω.

Une variable aléatoire est une fonction X allant de Ω sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que c'est une fonction, nommée X, qui à tout élément de Ω associe un réel.

Voici ce qu'on peut trouver sur wikipedia à ce sujet :

> Une notion importante en probabilité est celle de variable aléatoire.
>
> Les variables aléatoires furent introduites à l'origine pour représenter un gain. Par exemple effectuons l'expérience suivante, lançons une pièce de monnaie et suivant que le résultat est pile nous gagnons dix euros, ou face nous perdons un euro. On considère alors X, la variable aléatoire qui prend la valeur 10 lorsque nous obtenons pile et la valeur -1 lorsque nous obtenons face. X représente le gain à l'issue d'un lancer de la pièce.
>
> De façon plus générale une variable aléatoire est une certaine fonction, qui dépend du résultat d'une expérience aléatoire par exemple dans ce cas le résultat du pile ou face. Cette fonction associe une certaine valeur au résultat d'une expérience. Dans notre exemple plus haut la variable aléatoire associe 10 à "pile" et -1 à "face". Cela permet d'associer des nombres à des résultats d'expériences qui ne sont pas numériques.
>
> Le terme de variable aléatoire peut parfois être trompeur, en effet, ce n'est pas la valeur qu'elle prend une fois que l'on connait le résultat de l'expérience qui est aléatoire, mais la valeur qu'elle va prendre avant d'avoir effectué l'expérience. Une fois que l'on connait le résultat du pile ou face on connait la valeur de X, notre gain, avec certitude et celle ci ne dépend pas du hasard. Par contre, avant de jeter la pièce on ne sait pas quelle valeur va prendre X car on ne sait pas encore si l'on va obtenir pile ou face.

2. Loi de probabilité d'une variable aléatoire :

Soit une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats possibles (l'univers) est noté Ω, contenant n événement(s) élémentaire(s).
Soit X la variable aléatoire associée à cette expérience aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

La probabilité que $X = x_1$ est notée p_1 (on note également $p_1 = p(X = x_1)$)
La probabilité que $X = x_2$ est notée p_2 (on note également $p_2 = p(X = x_2)$)
…
La probabilité que $X = x_n$ est notée p_n (on note également $p_n = p(X = x_n)$)

La loi de probabilité de la variable X est l'ensemble des couples $(x_1; p_1)$, $(x_2; p_2)$,…,$(x_n; p_n)$

On a $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

Prenons un exemple simple et concret :

► On lance une pièce.
Si le résultat est pile, nous gagnons 10 € et si le résultat est face, nous perdons 1 €.

La loi de probabilité peut être représentée ainsi :

Lancer de pièce	pile	face
probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Valeur de X	10	-1

La loi de probabilité est les deux couples suivants : $\left(10; \frac{1}{2}\right)$, $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$

II. Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire

Soit une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats possibles (l'univers) est noté Ω, contenant *n* événement(s) élémentaire(s).
Soit X la variable aléatoire associée à cette expérience aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$.

1. Espérance :

L'espérance de X représente la moyenne.

L'espérance est notée $E(X)$ et est calculée ainsi :

$$E(X) = x_1.p(X = x_1) + x_2.p(X = x_2) + ... + x_n.p(X = x_n)$$

$$\text{Soit} \quad E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i.p(X = x_i)$$

2. Variance :

On note la variance $V(X)$ et on la calcule ainsi :

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2\, p(X = x_1) + (x_2 - E(X))^2\, p(X = x_2) + ... + (x_n - E(X))^2\, p(X = x_n)$$

$$\text{Soit} \quad V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \times p(X = x_i)$$

3. Ecart-type :

On note l'écart-type $\sigma(X)$ et on le calcule ainsi :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

III. Exercices sur les variables aléatoires

- **Enoncé**

Un jeu consiste à tirer au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. On mise une somme avant de tirer la carte.

- Si le joueur tire un **as**, il gagne **4 fois sa mise**,
- si le joueur tire un **roi**, il gagne **2 fois sa mise**,
- si le joueur tire une **dame**, il gagne **sa mise**,
- si le joueur tire un **valet**, il gagne **sa mise**,
- si le joueur tire une **autre carte**, il **perd sa mise**.

On considère que chaque carte a la même probabilité d'être tirée.

Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur. X représente donc combien de fois le joueur gagne sa mise. X est positif si le joueur gagne et négatif si le joueur perd.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.
3. Le jeu est-il équitable ?

➢ **Solution**

Loi de probabilité de *X* :

La variable X prend les valeurs 4, 2, 1 et -1.

Il y a 52 cartes, la probabilité de tirer une carte donnée est donc de $\frac{1}{52}$

- Il y a 4 as dans le jeu, la probabilité de tirer un as est de $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$. Lorsque le joueur tire un as, il gagne 4 fois sa mise, donc $p(X=4)=\frac{1}{13}$ (cela signifie que la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur 4 est de $\frac{1}{13}$).
- Il y a 4 rois dans le jeu, la probabilité de tirer un roi est de $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$, donc $p(X=2)=\frac{1}{13}$.
- Il y a 4 dames et 4 valets dans le jeu, la probabilité de tirer une dame ou un valet est de $\frac{8}{52}=\frac{2}{13}$, donc $p(X=1)=\frac{2}{13}$.
- Lorsque le joueur tire une autre carte, il perd sa mise donc X prend la valeur -1. Il y a 36 autres cartes, donc la probabilité d'en tirer une est de $\frac{36}{52}=\frac{9}{13}$, donc $p(X=-1)=\frac{9}{13}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donc la suivante :

x_i	-1	1	2	4
$p(X=x_i)$	$\frac{9}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$

☝ Pensez à vérifier que la somme des probabilités vaut 1, sinon il y a une erreur quelque part !

Ici, on a bien $\frac{9}{13}+\frac{2}{13}+\frac{1}{13}+\frac{1}{13}=1$.

Espérance, variance et écart-type de *X*.

On note $E(X)$ l'espérance de *X* et on a :

$$E(X) = x_1.p(X = x_1) + x_2.p(X = x_2) + ... + x_n.p(X = x_n)$$
$$E(X) = -\frac{9}{13} + \frac{2}{13} + 2\times\frac{1}{13} + 4\times\frac{1}{13} = -\frac{1}{13}$$

On note $V(X)$ la variance de *X* et on a :

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2\, p(X = x_1) + (x_2 - E(X))^2\, p(X = x_2) + ... + (x_n - E(X))^2\, p(X = x_n)$$
$$V(X) = (-1-(-\frac{1}{13}))^2\times\frac{9}{13} + (1-(-\frac{1}{13}))^2\times\frac{2}{13} + (2-(-\frac{1}{13}))^2\times\frac{1}{13} + (4-(-\frac{1}{13}))^2\times\frac{1}{13}$$
$$V(X) = \frac{1296}{13^3} + \frac{392}{13^3} + \frac{729}{13^3} + \frac{2809}{13^3} = \frac{5226}{13^3} = \frac{402}{13^2} \approx 2,38$$

On note $\sigma(X)$ l'écart-type de *X* et on a :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$
$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{402}{13^2}} = \frac{\sqrt{402}}{13} \approx 1,54$$

Le jeu est-il équitable ?

La variable *X* représente le gain du joueur. On voit que l'espérance de *X* est négative, donc le gain du joueur est en moyenne négatif. En moyenne, le joueur perd de l'argent, le jeu n'est donc pas équitable.