Exercices de probabilités

I. Cas de l'équiprobabilité

➢ Enoncé :

On lance deux dés. L'un est noir et l'autre est blanc.

Calculer les probabilités suivantes :

A « Obtenir exactement un as »
B « Obtenir au moins un as »
C « Obtenir au plus un as »
D « Obtenir deux nombres pairs »
E « Obtenir une somme strictement supérieure à 10 »
F « Obtenir une somme égale à 7 »

➢ Solution :

Représentons l'univers Ω par un tableau :

dé noir / dé blanc	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	8	10	11	12

On a $Card(\Omega) = 36$ (il y a en tout 36 cas possibles).

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité car chaque événement élémentaire (correspondant à chaque case du tableau) a la même probabilité de se réaliser.

- A « Obtenir exactement un as »

L'événement A signifie avoir un, et un seul, as sur les 2 dés. Il y a 10 cas possibles tels que cela.
Donc $Card(A) = 10$

$$p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

- B « Obtenir au moins un as »

L'événement B signifie avoir un ou deux as. Il y a 11 cas possibles tels que cela. Donc $Card(B) = 11$

$$p(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{11}{36}$$

- C « Obtenir au plus un as »

L'événement C signifie ne pas avoir plus de deux as. L'événement contraire, que nous noterons $\overline{C}$ est « Obtenir deux as ».

On a $Card(\overline{C}) = 1$ donc $p(\overline{C}) = \frac{Card(\overline{C})}{Card(\Omega)} = \frac{1}{36}$

Or $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

→ Il est parfois plus simple de passer par le calcul de la probabilité de l'événement contraire pour trouver une probabilité !

- D « Obtenir deux nombres pairs »

Il y a 9 cas possibles tels que cela. Donc $Card(D) = 9$

$$p(D) = \frac{Card(D)}{Card(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

- E « Obtenir une somme strictement supérieure à 10 »

Il y a 3 cas possibles tels que cela. Donc $Card(E) = 3$

$$p(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

- F « Obtenir une somme égale à 7 »

On a $Card(F) = 6$

$$p(F) = \frac{Card(F)}{Card(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

II. Cas de non équiprobabilité

- **Enoncé :**

Une boîte contient 8 jetons numérotés de 1 à 8, de forme et de taille différente.

On pioche au hasard un jeton de cette boîte. Le tableau suivant donne les probabilités de tirer chaque numéro (loi de probabilité) :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	0,1	0,1	0,2	0,05	inconnu	0,05	0,15	0,1

Répondre aux questions suivantes :

a. Calculer p_5
b. En déduire la probabilité de *A* : « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 »
c. Calculer la probabilité de *B* : « Obtenir un nombre impair »
d. Calculer la probabilité de C : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 »
e. Dire à quoi correspond l'événement $\overline{B}$, événement contraire *B*, et calculer sa probabilité.
f. Calculer la probabilité de $A \cup B$

- **Solution :**

Nous ne sommes pas ici dans un cas d'équiprobabilité !

a. Calculer p_5

On sait que la somme des probabilités de tous les événements élémentaires vaut 1, donc :

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 = 1$$

Donc $p_5 = 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_6 - p_7 - p_8$

$p_5 = 1 - 0,1 - 0,1 - 0,2 - 0,05 - 0,05 - 0,15 - 0,1$

$p_5 = 0,25$

b. En déduire la probabilité de *A* : « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 »

L'événement *A* correspond à $A = \{5, 6, 7, 8\}$

Or la probabilité de tout événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constitue.

Donc $p(A) = p_5 + p_6 + p_7 + p_8$

$p(A) = 0,25 + 0,05 + 0,15 + 0,1$

$p(A) = 0,55$

c. Calculer la probabilité de *B* : « Obtenir un nombre impair »

L'événement *B* correspond à $B = \{1, 3, 5, 7\}$

Donc $p(B) = p_1 + p_3 + p_5 + p_7$

$p(B) = 0,1 + 0,2 + 0,25 + 0,15$

$p(B) = 0,7$

d. Calculer la probabilité de C : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 »

On remarque que $C = \overline{A}$ donc $p(C) = p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

$p(C) = 1 - 0,55 = 0,45$

e. Dire à quoi correspond l'événement $\overline{B}$, événement contraire *B*, et calculer sa probabilité.

L'événement *B* est « Obtenir un nombre impair », donc l'événement $\overline{B}$ est « Obtenir un nombre pair ».

On a $p(\overline{B}) = 1 - p(B)$

$p(\overline{B}) = 1 - p(B)$

$p(\overline{B}) = 1 - 0,7 = 0,3$

On peut vérifier en calculant $p(B) = p_2 + p_4 + p_6 + p_8 = 0,1 + 0,05 + 0,05 + 0,1 = 0,3$

f. Calculer la probabilité de $A \cup B$

L'événement $A \cup B$ est l'événement « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 » **ou** « Obtenir un nombre impair ».

Donc $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$

Trois méthodes pour calculer :

- Calculer $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
  L'événement $A \cap B$ est l'événement « Obtenir un nombre supérieur ou égal à 5 » **et** « Obtenir un nombre impair », donc $A \cap B = \{5, 7\}$.
  $p(A \cap B) = p_5 + p_7 = 0,25 + 0,15 = 0,4$
  Donc $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,55 + 0,7 - 0,4 = 0,85$

- Calculer $p(A \cup B) = p_1 + p_3 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8$
  $p(A \cup B) = 0,1 + 0,2 + 0,25 + 0,05 + 0,15 + 0,1 = 0,85$

- $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$, donc $\overline{A \cup B} = \{2, 4\}$.
  $p\left(\overline{A \cup B}\right) = p_2 + p_4 = 0,1 + 0,05 = 0,15$
  $p(A \cup B) = 1 - p\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - 0,15 = 0,85$

III. Les différents types de tirage dans une urne

On considère une urne contenant 5 boules :

- 3 noires
- 1 blanche
- 1 verte

Tirages successifs avec remise de 3 boules

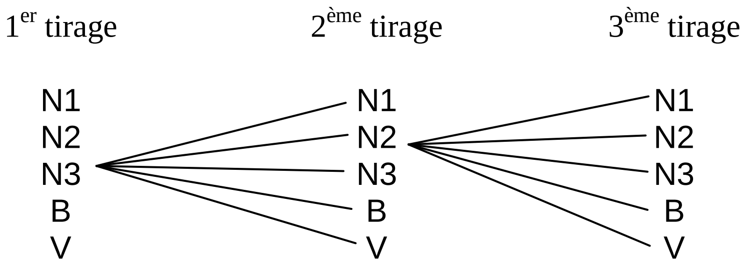
Décrire l'univers Ω et calculer $Card(\Omega)=36$.
Calculer les probabilités des événements suivants :

A : Tirer 3 boules de même couleur
B : Tirer 3 boules de 3 couleurs différentes
C : Tirer 3 boules vertes

Quel est l'événement le plus probable ?

Solution :

L'univers Ω est l'ensemble des triplets correspondant à chacun des 3 tirages successifs.
Nous pouvons le représenter par un arbre :



A chacun des tirages, il y a 5 résultats possibles, donc $Card(\Omega)=5^3=125$.

Evénement A : Tirer 3 boules de même couleur

Pour obtenir 3 boules de même couleur, on peut obtenir :
- 3 boules noires $Cardinal=3^3=27$ (cf. arbres)
- 3 boules blanches $Cardinal=1^3=1$
- 3 boules vertes $Cardinal=1^3=1$

$Card(A)=27+1+1=29$

$$p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{29}{125}$$

Evénement B : Tirer 3 boules de 3 couleurs différentes

Commençons par compter les tirages contenant N1 et avec 3 couleurs différentes :

{N1,V,B}, {N1,B,V}, {V, N1,B}, {B, N1,V}, {B,V, N1}, {V,B, N1}.

Il y a en tout 6 possibilités. Il en irait de même pour les 2 autres boules noires (il y a forcément une boule noire dans le tirage pour avoir 3 couleurs différentes).

Donc $Card(B) = 6 \times 3 = 18$

$$p(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{18}{125}$$

Evénement C : Tirer 3 boules vertes

$Card(C) = 1$

$$p(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{125}$$

Evénement le plus probable :

$p(A) > p(B) > p(C)$

L'événement le plus probable est l'événement A.

➢ Tirages successifs sans remise de 3 boules

Décrire l'univers Ω et calculer $Card(\Omega) = 36$.
Calculer les probabilités des événements suivants :

A : Tirer 3 boules de même couleur
B : Tirer 3 boules de 3 couleurs différentes
C : Tirer 3 boules vertes
D : Tirer 1 boule verte en première position
E : Obtenir un tirage contenant une boule verte

Solution :

Un élément de Ω est un triplet dans lequel tous les éléments sont différents.

Il y 5 possibilités au premier tirage. On ne remet pas la boule dans l'urne, donc au second tirage, il n'y a plus que 4 possibilités. On ne remet pas la boule dans l'urne, donc au troisième tirage, il n'y a plus que 3 possibilités.

$Card(\Omega) = 5 \times 4 \times 3 = 60$

Evénement A : Tirer 3 boules de même couleur

Pour réaliser l’événement A, il faut tirer une boule noire à chaque tirage.

$$Card(A) = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

1 noire parmi 3

ET

1 noire parmi 2

$$p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$$

Evénement B : Tirer 3 boules de 3 couleurs différentes

Avec le même raisonnement que dans le cas des tirages successifs avec remise, on obtient :

$$Card(B) = 6 \times 3 = 18$$

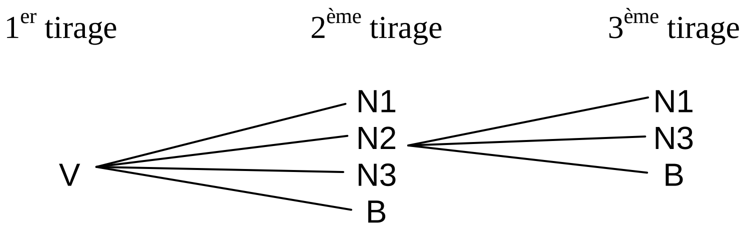
$$p(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{18}{125}$$

Evénement C : Tirer 3 boules vertes

L’événement C est impossible car on ne remet pas les boules dans l’urne.

$$p(C) = 0$$

Evénement D : Tirer 1 boule verte en première position



$$Card(D) = 1 \times 4 \times 3 = 12$$

$$p(D) = \frac{Card(D)}{Card(\Omega)} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

Evénement E : Obtenir un tirage contenant une boule verte

On peut obtenir la boule verte en première, deuxième ou troisième position, donc :

$$Card(E) = 1\times4\times3 + 4\times1\times3 + 4\times3\times1 = 36$$

OU OU

Boule verte en 1ère position

Boule verte en 3ème position

Boule verte en 2ème position

$$p(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

➢ Tirage simultané de 3 boules

Décrire l'univers Ω et calculer $Card(\Omega) = 36$.
Calculer les probabilités des événements suivants :

A : Tirer 3 boules de même couleur
B : Tirer 3 boules de 3 couleurs différentes
C : Tirer 3 boules vertes
E : Obtenir un tirage contenant une boule verte

Solution :

→ Dans le cas d'un tirage simultané, l'ordre n'a pas d'importance.

L'univers Ω est constitué des éléments suivants :

{N1,N2,N3}, {N1,N2,B}, {N1,N2,V}, {N1,N3,B}, {N1,N3,V}, {N2,N3,B}, {N2,N3,V}, {N1,B,V}, {N2,B,V}, {N3,B,V}.

Donc $Card(\Omega) = 10$

Evénement A : Tirer 3 boules de même couleur

On obtient {N1,N2,N3} donc $Card(A)=1$

$$p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{1}{10}$$

Evénement B : Tirer 3 boules de 3 couleurs différentes

On obtient {N1,B,V} ou {N2,B,V} ou {N3,B,V} donc $Card(B)=3$

$$p(B)=\frac{Card(B)}{Card(\Omega)}=\frac{3}{10}$$

Evénement C : Tirer 3 boules vertes

Evénement impossible donc $p(C)=0$

Evénement E : Obtenir un tirage contenant une boule verte

On obtient {N1,N2,V} ou {N1,N3,V} ou {N2,N3,V} ou {N1,B,V} ou {N2,B,V} ou {N3,B,V} donc $Card(E)=6$

$$p(E)=\frac{Card(E)}{Card(\Omega)}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

IV. Remarque : événements du type « au moins n », « au plus n »

On choisit au hasard un groupe de 4 personnes dans une classe.

Soient les événements suivants :

A : Il y au moins une fille dans le groupe
B : Il au moins 3 filles dans le groupe

L'événement A est réalisé dans les cas suivants :

- 1 fille et 3 garçons,
- 2 filles et 2 garçons,
- 3 filles et 1 garçons,
- 4 filles.

L'événement B est réalisé dans les cas suivants :

- 3 filles et 1 garçons,
- 4 filles.

L'événement $\overline{A}$ est « Il n'y a pas de fille dans le groupe ».
L'événement $\overline{B}$ est « Il y a moins de 3 filles dans le groupe ».

→ Le contraire de « au moins *n* » est « moins de *n* »

→ De la même façon, le contraire de « au plus *n* » est « plus de *n* »