Probabilités

I. Qu’est-ce qu’une probabilité ?

1. Première approche :

Une probabilité en mathématique est un chiffre compris entre 0 et 1. Ce chiffre représente une évaluation du caractère probable d’un événement.

Si la probabilité de se produire d’un événement est 1, alors il se produira forcément. Si cette probabilité est de 0, il ne se produira jamais.

Prenons un exemple simple et concret :

► On lance un dé de six faces.

Cette action est une **expérience aléatoire** car on ne peut évidemment pas savoir avant de lancer dé sur quelle face il tombera.
Si le dé n’est pas pipé, on peut obtenir avec la même probabilité le chiffre 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
On dit intuitivement qu’on a 1 chance sur 6 d’obtenir le numéro 4 par exemple.
La probabilité de l’événement « on obtient le chiffre 4 » est donc égale à $\frac{1}{6}$.

2. Vocabulaire des probabilités :

Précisons ici quelques notions de vocabulaire propre aux probabilités :

Expérience aléatoire : expérience faisant intervenir le hasard et dont on ne peut donc pas deviner a priori l’issue.

Exemple : le tirage du loto, le jet d’un dé…

Univers : L’ensemble de toutes les issues possibles d’une expérience aléatoire est appelé univers. En général, on le note Ω (prononcer « oméga »).
Dans l’exemple d’un lancer de dé, on a $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.

Evénement : tout ou partie de l’univers.
Dans l’exemple d’un lancer de dé, on peut avoir l’événement « obtenir le chiffre 4 », qu’on pourrait noter $A = \{4\}$, ou encore l’événement « obtenir le chiffre 1 ou le chiffre 3 », qu’on pourrait noter $B = \{1;3\}$, etc…

Cardinal : Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments contenu dans cet ensemble.
Il est généralement noté *Card(ensemble)*.
Dans l'exemple d'un lancer de dé, on a $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, donc $Card(\Omega) = 6$

3. Les différents types d'événements :

➢ L'événement élémentaire :

C'est un événement constitué d'un et d'**un seul résultat**.

<u>Exemple :</u> On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. L'événement « obtenir l'as de pique » est un événement élémentaire.

➢ Intersection de deux événements :

On peut également le noter événement « A et B » ou événement « $A \cap B$ » (prononcer A inter B).
Il faut que les deux événements se réalisent.

<u>Exemple :</u> On tire deux cartes dans un jeu de 52 cartes. L'événement « obtenir l'as de pique et l'as de coeur » est l'intersection des deux événements élémentaires « obtenir l'as de pique » et « obtenir l'as de coeur ».

➢ Réunion de deux événements :

On peut également le noter événement « A ou B » ou événement « $A \cup B$ » (prononcer A union B).
Il suffit que l'un des deux événements se réalise.

<u>Exemple :</u> On tire deux cartes dans un jeu de 52 cartes. L'événement « obtenir l'as de pique ou l'as de coeur » est la réunion des deux événements élémentaires « obtenir l'as de pique » et « obtenir l'as de coeur ».

➢ Evénements incompatibles :

Deux événements sont incompatibles s'ils n'ont aucun élément en commun.
Si deux événements A et B sont incompatibles, on a donc $A \cap B = \varnothing$.

<u>Exemple :</u> On tire un dé. Soient l'événement A est « obtenir 2, 4 ou 6 » et l'événement B « obtenir 1 ». Les événements A et B sont incompatibles (ou disjoints).

➢ Evénements contraires :

Deux événements sont contraires lorsque qu'**ils n'ont aucun élément en commun** et que l'**union des éventualités de ces événements forme l'univers**, c'est-à-dire la totalité des éventualités. On note $\overline{A}$ l'événement contraire de A.

On a donc $A \cap \overline{A} = \varnothing$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.
Exemple : On tire un dé. Soient l'événement A est « obtenir 1, 2 ou 6 ». Son événement contraire, noté $\overline{A}$, est « obtenir 3, 4 ou 5 ».

➢ Evénement certain :

Un événement certain se réalise quelque soit le résultat de l'expérience.

Exemple : On tire un dé. L'événement « obtenir un chiffre entre 1 et 6 » est certain.

➢ Evénement impossible :

Un événement impossible ne peut pas se réaliser.

Exemple : On tire un dé. L'événement « obtenir le chiffre 8 » est impossible.

II. Calcul de probabilités

1. Définition :

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.
Une probabilité est une application (définie sur l'ensemble des événements de Ω) qui à tout événement A associe un nombre $p(A) \in [0;1]$
Cette application est telle que :

- **La somme des probabilités de tous les événements élémentaires de Ω vaut 1.**
- **La probabilité de tout événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constitue.**

2. Cas de l'équiprobabilité des événements élémentaires :

➢ Qu'est-ce que l'équiprobabilité ?

Des **événements élémentaires sont équiprobables** lorsqu'**ils ont tous la même probabilité de se réaliser**.

<u>*Exemple :*</u> On tire un dé. L'univers Ω est constitué des 6 événements élémentaires suivants :

- E_1 : « On obtient le chiffre 1 »
- E_2 : « On obtient le chiffre 2 »
- E_3 : « On obtient le chiffre 3 »
- E_4 : « On obtient le chiffre 4 »
- E_5 : « On obtient le chiffre 5 »
- E_6 : « On obtient le chiffre 6 »

On comprend que chaque événement à la même probabilité de se réaliser, ils sont donc équiprobables.

Si on reprend les propriétés de la définition du II.1. (paragraphe précédent), on a :
$p(E_1)+p(E_2)+p(E_3)+p(E_4)+p(E_5)+p(E_6)=1$

➢ Calcul de probabilité d'un événement élémentaire dans le cas de l'équiprobabilité

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. Dans le cas de l'équiprobabilité, la probabilité d'un **événement élémentaire** est $p=\dfrac{1}{Card(\Omega)}$

Démonstration :

Soit l'univers $\Omega=\{\omega_1;\omega_2,...,\omega_n\}$ où les ω_i représentent les événements élémentaires.

n est le nombre d'événement élémentaire, donc $n=Card(\Omega)$.

On a équiprobabilité, donc $p(\omega_1)=p(\omega_2)=...=p(\omega_n)$.

On a également $p(\omega_1)+p(\omega_2)+...+p(\omega_n)=1$
Comme $p(\omega_1)=p(\omega_2)=...=p(\omega_n)$, on en déduit que $n\times p(\omega_1)=1$
Donc $p(\omega_1)=\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{Card(\Omega)}$

<u>***Exemple :***</u> Dans l'exemple précédent du lancer de dé, on a $p(E_1)=p(E_2)=...=p(E_6)=\dfrac{1}{6}$

➢ Calcul de probabilité d'un événement dans le cas de l'équiprobabilité

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. Dans le cas de l'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{\text{nombre de résultats favorables à A}}{\text{nombre de résultats possibles}}$$

Démonstration :

Soit l'événement A tel que $A=\{\omega_1;\omega_2,...,\omega_p\}$ avec $\omega_1;\omega_2,...,\omega_p$ qui sont p événements élémentaires.

On a $p=Card(A)$

De plus $p(A)=p(\omega_1)+p(\omega_2)+...+p(\omega_p)$ (cf. la définition du II.1. tiret 2)

Or la probabilité de chaque événement élémentaire vaut $\frac{1}{Card(\Omega)}$

Donc

$$p(A)=p(\omega_1)+p(\omega_2)+...+p(\omega_p)=\frac{1}{Card(\Omega)}+\frac{1}{Card(\Omega)}+...+\frac{1}{Card(\Omega)}=p\times\frac{1}{Card(\Omega)}$$

$$p(A)=Card(A)\times\frac{1}{Card(\Omega)}=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

Exemple : Dans l'exemple précédent du lancer de dé, on a nomme A l'événement « obtenir 2 ou 5 », donc $A=\{E_2;E_5\}$

On a $p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

3. Propriétés des probabilités :

➢ Probabilité de l'événement contraire :

Soit A un événement. Son événement contraire est noté $\bar{A}$

$$p(A)+p(\bar{A})=1$$

Donc $p(A)=1-p(\bar{A})$

Et $p(\bar{A})=1-p(A)$

Il est parfois plus simple de **passer par le calcul de la probabilité de l'événement contraire** pour trouver une probabilité.

➢ Probabilité de la réunion de deux événements :

Soient A et B deux événements.

- **La réunion des deux événements** A et B se note $A \cup B$ (prononcer « A union B ») et est l'ensemble des éléments de A **ou** de B (cf. fiche « rappel sur les ensembles »).
- **L'intersection des deux événements** A et B se note $A \cap B$ (prononcer « A inter B ») et est l'ensemble des éléments de A **et** de B (cf. fiche « rappel sur les ensembles »).

La probabilité de la réunion de deux événements vérifie la relation suivante :

$$\boxed{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$$

Si A et B sont incompatibles (ils n'ont aucun élément en commun), on a $A \cap B = \varnothing$. Or $p(\varnothing) = 0$, donc dans ce cas :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$