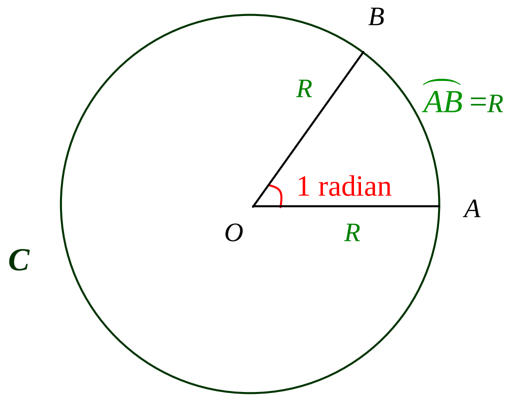
Angles orientés
Trigonométrie

I. Préliminaires

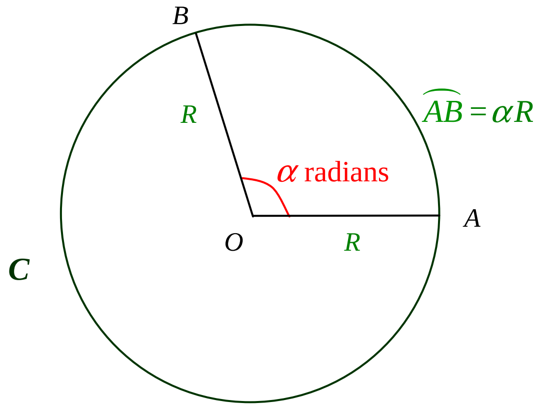
1. Le radian

➢ **Définition**



Soit C un cercle de centre O. Dire que l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ a pour mesure 1 radian signifie que la longueur du petit arc $\overset{\frown}{AB}$ est égal au rayon R du cercle.

De même, la longueur d'un arc de cercle de rayon R et dont l'angle au centre a pour mesure α radians est αR .

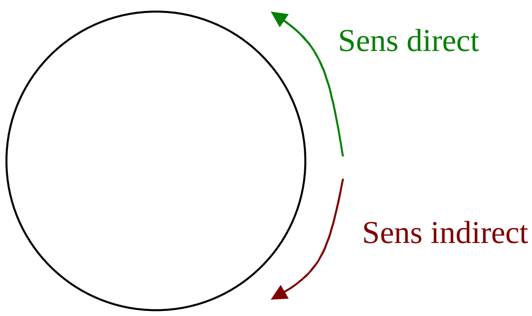


➢ Correspondance entre mesures en degré et en radian

Degré	0	30	45	60	90	180	x
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	α

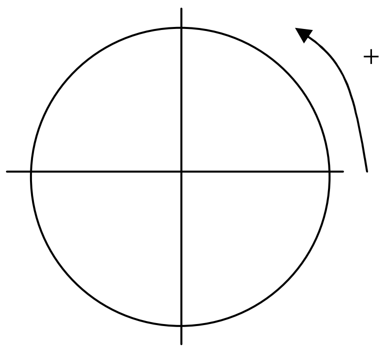
Pour convertir les 2 unités de mesure d'angle, on utilise la formule $180\alpha = \pi x$, soit $\alpha = \frac{\pi}{180}x$ avec α mesure en radian et x mesure en degré.

2. Orientations d'un cercle



3. Cercle trigonométrique

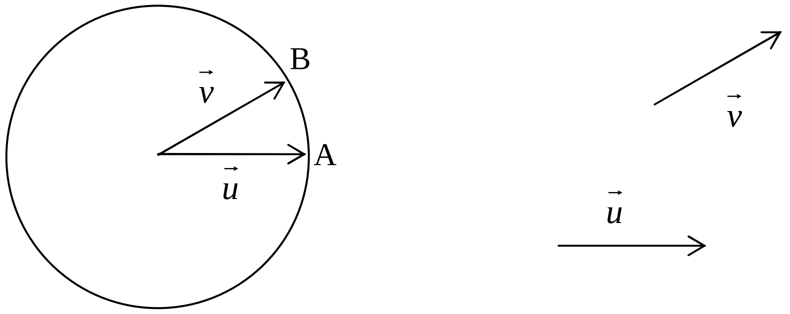
Un cercle trigonométrique est de rayon 1 et est orienté positivement dans le sens direct.



II. Angles orientés

1. Angle orienté de deux vecteurs unitaires

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires. Le couple $(\vec{u},\vec{v})$ de ces 2 vecteurs définit un angle orienté. On a $\|\vec{u}\|=1$ et $\|\vec{v}\|=1$



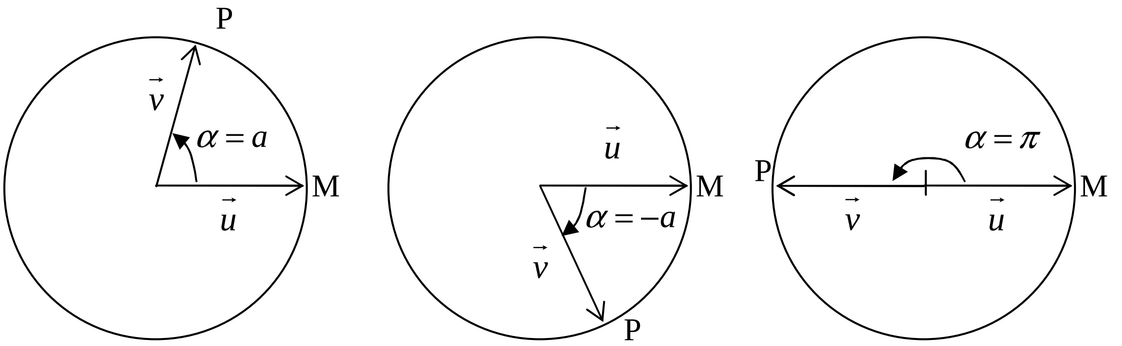
A ce couple de vecteurs, nous pouvons associer un arc orienté $\overset{\frown}{AB}$.

2. Angle orienté de deux vecteurs non nuls

Soient $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v_1}$ deux vecteurs non nuls. On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{u_1}$ et de même sens que $\overrightarrow{u_1}$ et on note $\vec{v}$ le vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{v_1}$ et de même sens que $\overrightarrow{v_1}$.
L'angle $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1})$ est par définition égal à l'angle $(\vec{u},\vec{v})$.

3. Mesure principale en radian d'un angle orienté

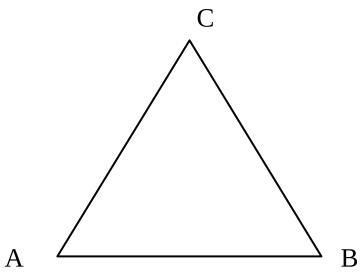
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires. Soient M et P les points du cercle trigonométrique de centre O tels que $OM=\vec{u}$ et $OP=\vec{v}$.
On note a la mesure en radian de l'angle $\widehat{MOP}$.
La mesure principale de l'angle orienté des vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$ est le réel α appartenant à l'intervalle $]-\pi;+\pi]$ tel que $|\alpha|=a$ et dont le signe est défini de la manière suivante :



Si le sens de M vers P sur le petit arc $\overset{\frown}{MP}$ est le sens direct, alors $\alpha = a$	Si le sens de M vers P sur le petit arc $\overset{\frown}{MP}$ est le sens indirect, alors $\alpha = -a$	Si l'angle $\widehat{MOP}$ est plat, alors $\alpha = \pi$

Exemple :

ABC est un triangle équilatéral direct



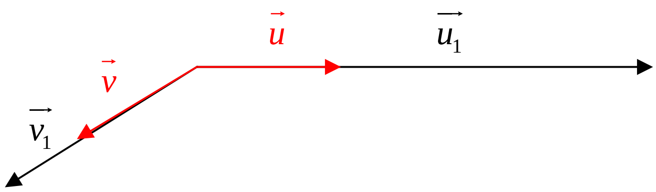
$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$$

$$(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{3}$$

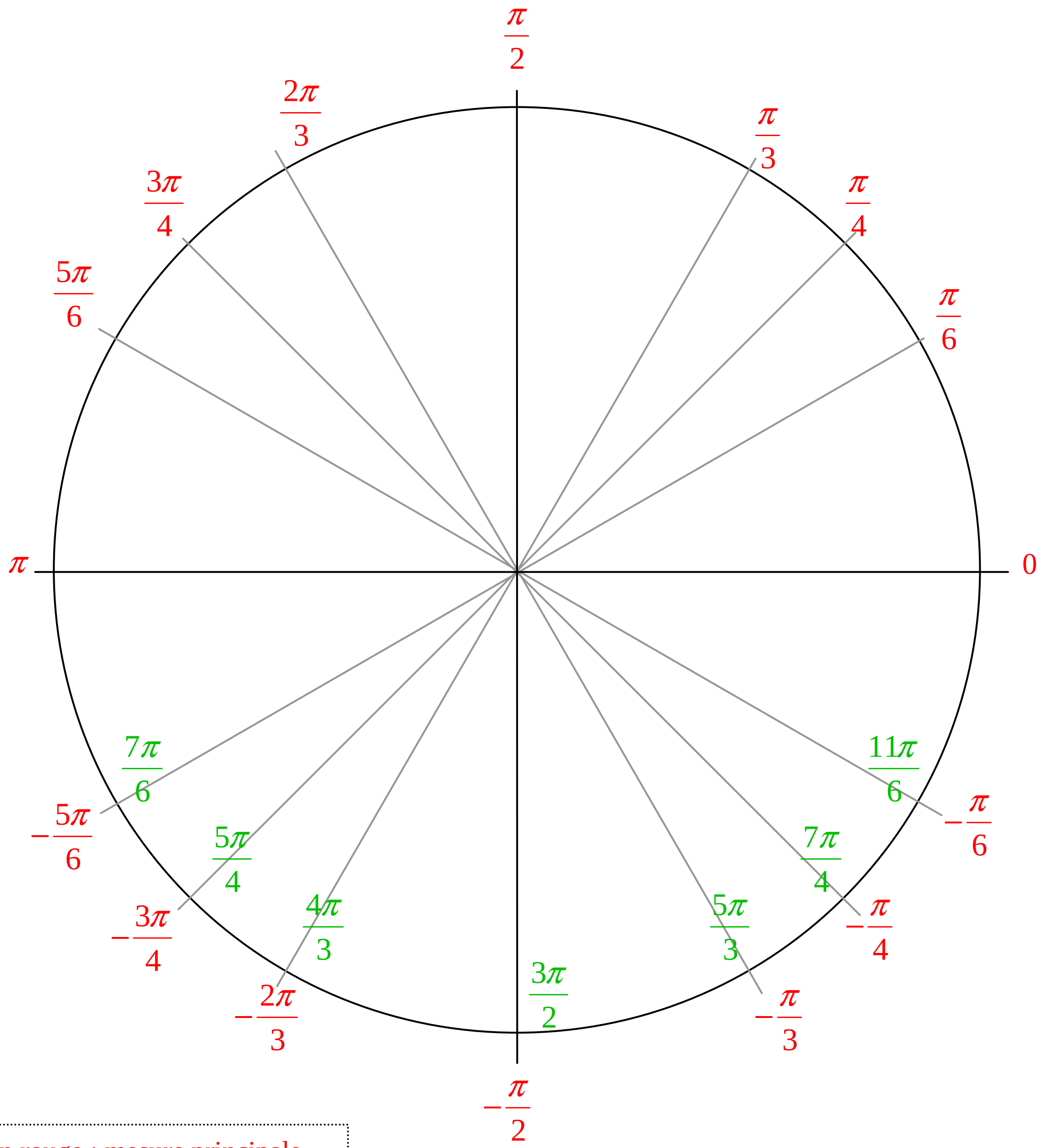
$$(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$$

Si les vecteurs ne sont pas unitaires : La mesure principale d'un angle orienté de deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v_1}$ est la mesure principale de l'angle orienté $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui sont les vecteurs unitaires colinéaires respectivement à $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v_1}$ et de même sens que ces vecteurs.

$$\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{v_1}\right) = \left(\vec{u},\vec{v}\right)$$



4. Mesures principales d'angles sur le cercle trigonométrique



En rouge : mesure principale

En vert : la plus petite mesure positive

Remarque importante :

Si θ est une mesure (en radians) d'un angle de vecteurs $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$, toutes les autres mesures de cet angle sont de la forme :

$$\theta + k.2\pi \ \text{ avec } \ k \in \mathbb{Z}$$

Parmi toutes ces mesures, une seule appartient à l'intervalle $\left]-\pi;\pi\right]$, c'est la mesure principale.

Explication : 2π représente une rotation complète sur le cercle, si on rajoute 2π à une mesure d'angle, on retrouve donc la même mesure.

Exemples :

Donner toutes les mesures des angles dont la mesure principale est α, puis donner la plus petite mesure positive :

- $\alpha = -\dfrac{5\pi}{6}$

Toutes les mesures de cet angle sont la forme : $x = -\dfrac{5\pi}{6} + k.2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Si $k=1$, $x_1 = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{-5\pi+12\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6}$

Si $k=2$, $x_2 = -\dfrac{5\pi}{6} + 2.2\pi = \dfrac{-5\pi+24\pi}{6} = \dfrac{19\pi}{6}$

La plus petite mesure positive de l'angle est $\dfrac{7\pi}{6}$.

- $\alpha = -\dfrac{3\pi}{4}$

Toutes les mesures de cet angle sont la forme : $x = -\dfrac{3\pi}{4} + k.2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Si $k=1$, $x_1 = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{-3\pi+8\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{4}$

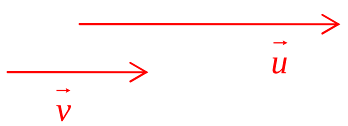
Si $k=2$, $x_2 = -\dfrac{3\pi}{4} + 2.2\pi = \dfrac{-3\pi+16\pi}{4} = \dfrac{13\pi}{4}$

La plus petite mesure positive de l'angle est $\dfrac{5\pi}{4}$.

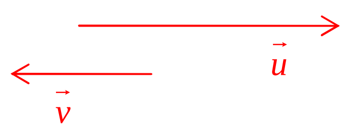
5. Propriétés des angles orientés

Colinéarité et orthogonalité :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens :
  $(\vec{u},\vec{v}) = 0 + k.2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$



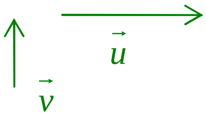
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires
  $(\vec{u},\vec{v}) = \pi + k.2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

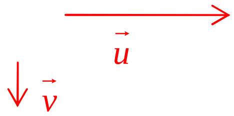


- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

  $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\pi}{2}+k.2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

  ou $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-\frac{\pi}{2}+k.2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$





➢ Egalité entre deux angles :

Deux angles de vecteurs $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\theta$ et $\left(\vec{u'},\vec{v'}\right)=\theta'$ sont égaux si : $\theta'=\theta+k.2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Exemple : $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-\frac{2\pi}{3}$ et $\left(\vec{u'},\vec{v'}\right)=\frac{10\pi}{3}$. Ces deux angles sont-ils égaux ?

$\frac{10\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}+4\pi=\frac{-2\pi+12\pi}{3}$

Les deux angles sont égaux.

➢ Relation de Chasles :

La relation de Chasles pour les angles de vecteurs se définit ainsi :

$$\boxed{\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\left(\vec{v},\vec{w}\right)=\left(\vec{u},\vec{w}\right)}$$

Exemple :

Soient 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls et tels que $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{7\pi}{6}$ et $\left(\vec{v},\vec{w}\right)=\frac{4\pi}{3}$

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

Solution :

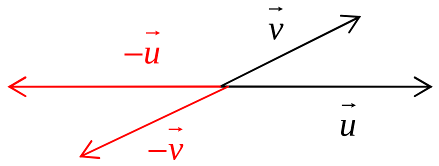
D'après la relation de Chasles, on sait que : $\left(\vec{u},\vec{w}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\left(\vec{v},\vec{w}\right)$

Donc $\left(\vec{u},\vec{w}\right)=\frac{7\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}=\frac{7\pi+8\pi}{6}=\frac{15\pi}{6}=\frac{5\pi}{2}$

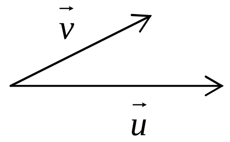
$\left(\vec{u},\vec{w}\right)=\frac{\pi}{2}+2\pi$ donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

- **Egalités remarquables :**

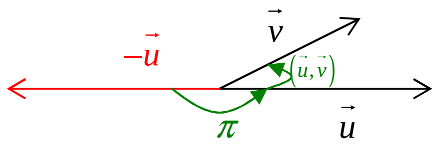
  - **Angles égaux :** $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\left(-\vec{u},-\vec{v}\right)$

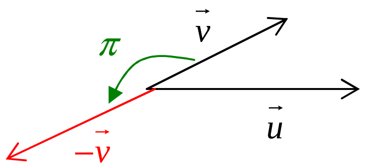


  - **Angles opposés :** $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-\left(\vec{v},\vec{u}\right)$



  - **Angles supplémentaires :** $\left(-\vec{u},\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\pi$ et $\left(\vec{u},-\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)+\pi$





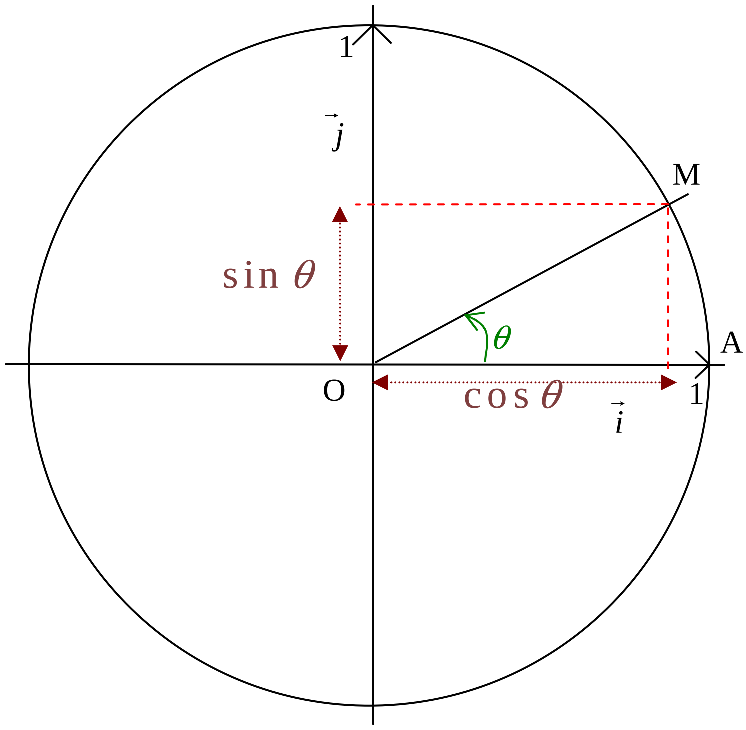
III. Cosinus et sinus d'un angle orienté

1. Définition ☝ important

Remarque préliminaire : Nous travaillerons dans une base orthonormée directe $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$, c'est-à-dire que $\left(\vec{i},\vec{j}\right)=\frac{\pi}{2}$ (dans une base indirecte, on a $\left(\vec{i},\vec{j}\right)=-\frac{\pi}{2}$)

Soit un angle de vecteurs et M le point du cercle trigonométrique tel que $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)=\theta$
Par définition, on a :

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos\theta=\text{abscisse de } M\\ \sin\theta=\text{ordonnée de } M\end{array}}$$



Remarquons également que $\overrightarrow{OM} = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$

Remarquons qu'on retrouve les définitions du sinus et du cosinus dans le triangle rectangle :

$\cos\theta = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \text{côté adjacent}$ car $OM = 1$.

$\sin\theta = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \text{côté opposé}$ car $OM = 1$.

Remarque :

Si θ est une mesure (en radians) d'un angle de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$, on a : $\theta = \theta + k.2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc :

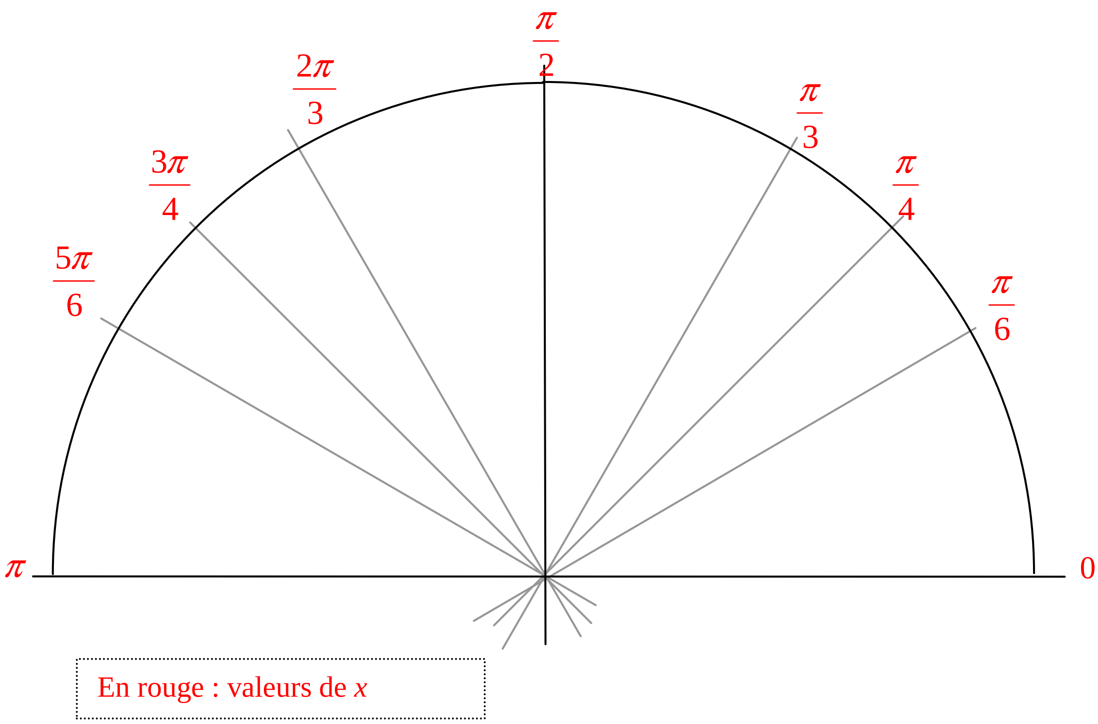
$$\cos x = \cos(x + k.2\pi) \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$
$$\sin x = \sin(x + k.2\pi) \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

2. Formules essentielles ☝ important

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$-1 \le \cos x \le 1$$
$$-1 \le \sin x \le 1$$

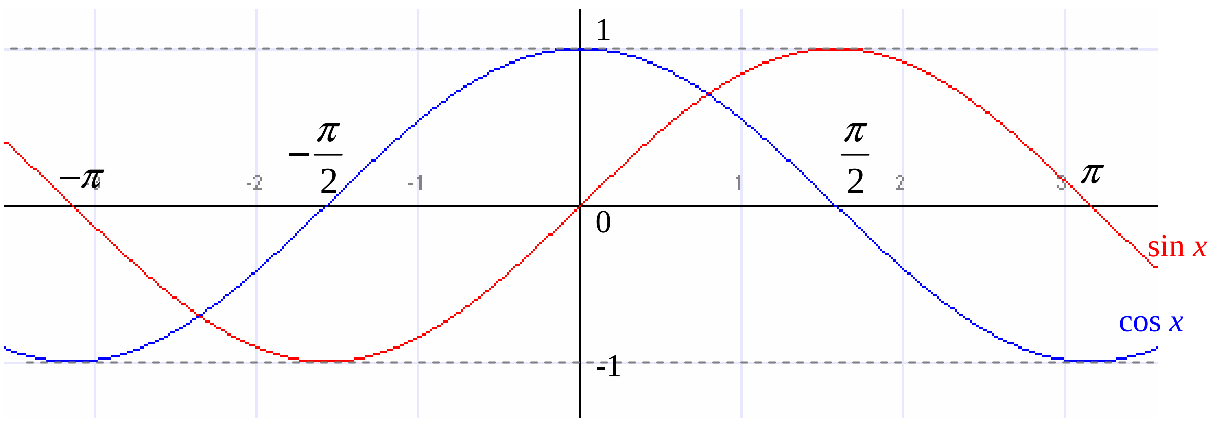
3. Signes et valeurs particulières de cos x et sin x



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Tableau de signe :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos x	-1	-	0	+	1	+	0	-	-1
sin x	0	-	-1	-	0	+	1	+	0



IV. Calculs trigonométriques

1. Angles associés

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Exemples d'utilisation :

Calculons des valeurs particulières de $\cos x$ et $\sin x$ à partir de valeurs connues (cf. III.3.) :

$$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$$

Remarque : on peut retrouver toutes les formules à partir de la 2ème formule (la plus simple) :
$\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$

Retrouvons $\cos(a+b)$ **:**

$\cos(a+b)=\cos(a-(-b))=\cos a.\cos(-b)+\sin a.\sin(-b)$

$\cos(a+b)=\cos a.\cos b+\sin a.(-\sin b)$

$\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$

Retrouvons $\sin(a+b)$ **:**

$\sin(a+b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right)$

$\sin(a+b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b$

$\sin(a+b)=\sin a.\cos b-\cos a.\sin b$

Retrouvons $\sin(a-b)$ **:**

$\sin(a-b)=\sin(a+(-b))=\sin a.\cos(-b)+\sin(-b).\cos a$

$\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\sin b.\cos a$

Exemples d'utilisation :

Trouver les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Solution :

Essayons de décomposer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ en valeurs que nous connaissons :

On sait que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$

Donc $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{4}$

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}.\sqrt{2}}{4}$

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3. Formules de duplication

$$\boxed{\sin 2a = 2.\sin a.\cos a}$$

Pour retrouver la formule :

$\sin 2a = \sin(a+a) = \sin a.\cos a + \cos a.\sin a$

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a}$$

Pour retrouver la formule :

$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a.\cos a - \sin a.\sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \\ \cos 2a = 2\cos^2 a - 1\end{array}}$$

car $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$

4. Formules de linéarisation

$$\boxed{\begin{array}{c}\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2} \\ \cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}\end{array}}$$

Pour retrouver les formules :

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ donc $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$ donc $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ donc $2\cos^2 a = \cos 2a + 1$ donc $\cos^2 a = \dfrac{\cos 2a + 1}{2}$

Utilisation de ces formules :

Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ en utilisant les formules de linéarisation.

Solution :

D'après les formules de linéarisation, on sait que :

$$\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1+\cos\left(2\frac{\pi}{12}\right)}{2} \quad \text{donc} \quad \cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

De plus, on sait que $0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{\pi}{12}>0$. On peut « passer sous la racine » l'égalité précédente :

$$\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{12}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \quad \text{donc} \quad \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Calculons maintenant $\sin\frac{\pi}{12}$:

D'après les formules de linéarisation, on sait que :

$$\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\left(2\frac{\pi}{12}\right)}{2}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

De même, on sait que $0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$ donc $\sin\frac{\pi}{12}>0$. On peut « passer sous la racine » l'égalité précédente :

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Autre exemple d'utilisation des formules de linéarisation :

Factoriser les expressions suivantes :

$$A(x)=1+\cos 2x+\cos x$$
$$B(x)=1-\cos 2x+\sin x$$
$$C(x)=1+\cos x+\cos\frac{x}{2}$$
$$D(x)=1+\cos x+\sin x$$

Solutions :

D’après les formules de linéarisation : $A(x)=2\cos^2 2x+\cos x$

Donc $A(x)=\cos x(2\cos x+1)$

D’après les formules de linéarisation : $B(x)=2\sin^2 2x+\sin x$

Donc $B(x)=\sin x(2\sin x+1)$

$C(x)=1+\cos x+\cos\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$ car $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$ donc $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$

$C(x)=\cos\frac{x}{2}\left(1+2\cos\frac{x}{2}\right)$

$D(x)=1+\cos x+\sin x=2\cos^2\frac{x}{2}+\sin x$

Or $\sin x=\sin\left(2\frac{x}{2}\right)=2.\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$

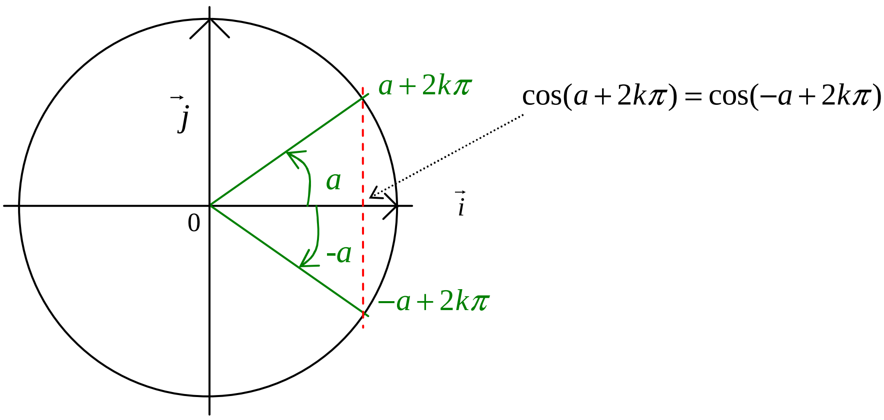
Donc $D(x)=2\cos^2\frac{x}{2}+2.\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}=2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)$

V. Equations trigonométriques

1. Equation du type cos *A(x)* = cos *B(x)*

- **Théorème**

$\cos A(x)=\cos B(x)$ signifie que $B(x)=A(x)+2k\pi$ ou $B(x)=-A(x)+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$



➢ Exemples d'utilisation du théorème

Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes :

(1) $\cos x = 0$
(2) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$
(3) $\cos 2x = 1$
(4) $\cos 3x = 1$

Solutions :

(1) $\cos x = 0$

Cette équation équivaut à $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{2}$.

Donc la solution est $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si on prend $k = 0$ pour se placer dans $]\pi;-\pi]$, on obtient $x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{2}$

Donc $S = \left\{-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right\}$

(2) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

Cette équation équivaut à $\cos x = \cos\dfrac{2\pi}{3}$.

Donc la solution est $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si on prend $k = 0$ pour se placer dans $]\pi;-\pi]$, on obtient $x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = -\dfrac{2\pi}{3}$

Donc $S = \left\{-\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right\}$

(3) $\cos 2x = 1$

Cette équation équivaut à $\cos x = \cos 0$.
Donc la solution est $2x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Donc $x = k\pi$
Pour $k = 0$, on a $x = 0$ et pour $k = 1$, on a $x = \pi$
Donc $S = \{0;\pi\}$

(4) $\cos 3x = 1$

Cette équation équivaut à $\cos 3x = \cos 0$.
Donc la solution est $3x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $x = \dfrac{2k\pi}{3}$

Pour $k = -1$, on a $x = -\dfrac{2\pi}{3}$.

Pour $k = 0$, on a $x = 0$.

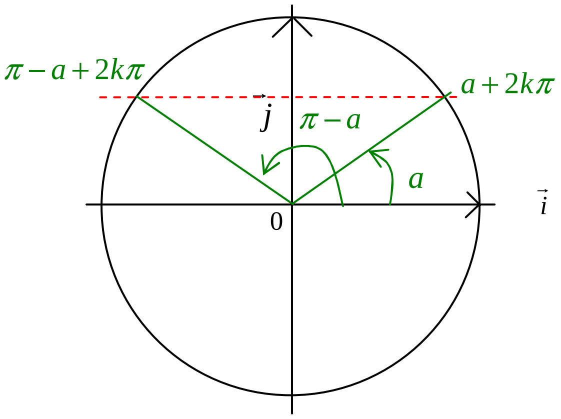
Pour $k = 1$, on a $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

Donc $S = \left\{ -\dfrac{2\pi}{3} ; 0 ; \dfrac{2\pi}{3} \right\}$

2. Equation du type sin *A(x)* = sin *B(x)*

➢ Théorème

$\sin A(x) = \sin B(x)$ signifie que		$B(x) = A(x) + 2k\pi$
	ou	$B(x) = \pi - A(x) + 2k\pi$
		avec $k \in \mathbb{Z}$



➢ Exemples d'utilisation du théorème

Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ les équations suivantes :

(1) $\sin x = 0$
(2) $\sin 2x = 1$
(3) $\sin 3x = \dfrac{1}{2}$

Solutions :

(1) $\sin x = 0$ équivaut à $\sin x = \sin 0$

Donc, d'après le théorème précédent, $x = 0 + 2k\pi$ ou $x = \pi - 0 + 2k\pi$
On obtient $x = 2k\pi$ ou $x = \pi + 2k\pi = (2k+1)\pi$

Si $k = 0$, on a $x = 0$ ou $x = \pi$
Si $k = 1$, on a $x = 2\pi$ ou $x = 3\pi$
Si $k = 2$, on a $x = 4\pi$ ou $x = 5\pi$
…

La solution de l'équation est donc $x = k\pi$, et dans $]-\pi;\pi]$ on a $S = \{0;\pi\}$

(2) $\sin 2x = 1$ équivaut à $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{2}$

On obtient $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $2x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Donc $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Dans $]-\pi;\pi]$ on a $S = \left\{-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$

(3) $\sin 3x = \frac{1}{2}$ équivaut à $\sin 3x = \sin \frac{\pi}{6}$

On obtient $3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $3x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Soit $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi$

Si $k = 0$, on a $x = \frac{\pi}{18}$ ou $x = \frac{5\pi}{18}$

Si $k = 1$, on a $x = \frac{13\pi}{18}$ ou $x = \frac{17\pi}{18}$

Si $k = -1$, on a $x = -\frac{11\pi}{18}$ ou $x = -\frac{7\pi}{18}$

Dans $]-\pi;\pi]$ on a $S = \left\{-\frac{11\pi}{18};-\frac{7\pi}{18};\frac{\pi}{18};\frac{5\pi}{18};\frac{13\pi}{18};\frac{17\pi}{18}\right\}$

VI. Variations et représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus

1. Fonction sinus

On pose $f(x) = \sin x$

L'ensemble de définition de *f* est $D_f = \mathbb{R}$

- ***Propriétés particulières de la fonction :***

On sait que $\sin(-x) = -\sin x$ donc $f(-x) = -f(x)$
La fonction sinus est **impaire**, sa courbe est donc symétrique par rapport à l'origine.

On sait également que $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$
La fonction sinus est **périodique, de période** 2π **.**

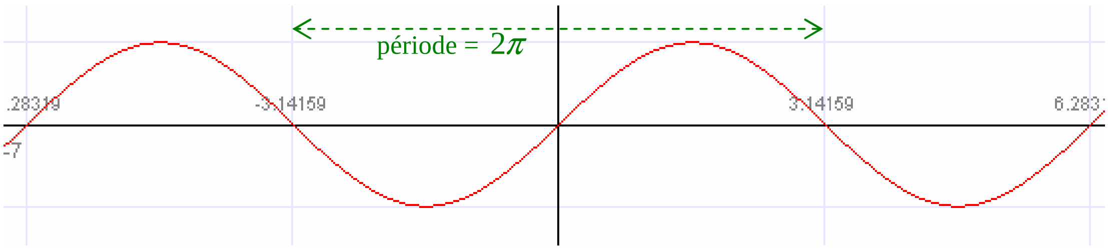
Il est donc suffisant d'étudier la fonction sur $[0;\pi]$ pour avoir toute la courbe. Il faudra ensuite effectuer une symétrie par rapport à l'origine et des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$.

- ***Dérivée de la fonction :***

Si $f(x) = \sin x$, alors $f'(x) = \cos x$

- ***Tableau de variation :***

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x) = \cos x$		+	0	-	
$f(x) = \sin x$	0	↗	1	↘	0



Représentation graphique de la fonction $f(x) = \sin x$

2. Fonction cosinus

On pose $f(x) = \cos x$

L'ensemble de définition de *f* est $D_f = \mathbb{R}$

➢ ***Propriétés particulières de la fonction :***

On sait que $\cos(-x) = \cos x$ donc $f(-x) = f(x)$
La fonction cosinus est **paire**, sa courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On sait également que $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$
La fonction cosinus est **périodique, de période** 2π **.**

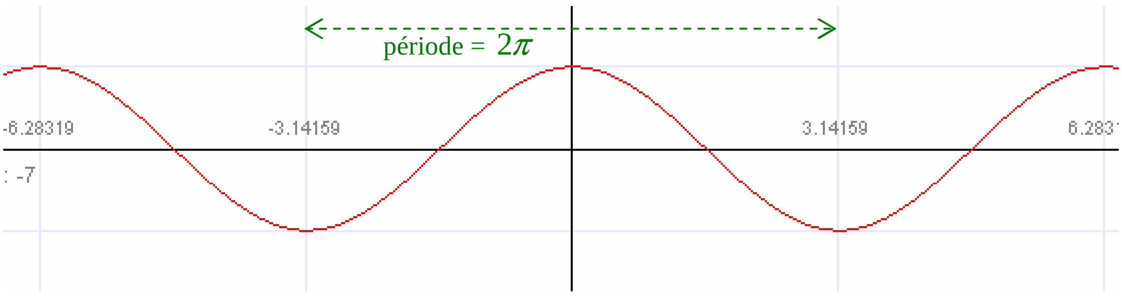
Il est donc suffisant d'étudier la fonction sur $[0;\pi]$ pour avoir toute la courbe. Il faudra ensuite effectuer une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$.

➢ ***Dérivée de la fonction :***

Si $f(x) = \cos x$, alors $f'(x) = -\sin x$

➢ ***Tableau de variation :***

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x) = -\sin x$		-	
$f(x) = \cos x$	1	↘ 0	-1



Représentation graphique de la fonction $f(x) = \cos x$